

แผนการจัดการเรียนรู้

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

นายสุเมธ จันทรสุมบัตติ

โรงเรียนสตรีศึกษา อำเภอเมืองร้อยเอ็ด จังหวัดร้อยเอ็ด
สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาร้อยเอ็ด
สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ



แผนการจัดการเรียนรู้
รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6

นายสุเมธ จันทรสสมบัติ

โรงเรียนสตรีศึกษา จังหวัดร้อยเอ็ด
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาร้อยเอ็ด
สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำนำ

แผนการจัดการเรียนรู้เล่มนี้ จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบการจัดการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค 33205 ภาคเรียนที่ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) และใช้เป็นแนวทางแก่ครู – ผู้สอน ในการจัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นแผนการจัดการเรียนรู้ที่เน้นนักเรียนเป็นสำคัญ เน้นการเรียนการสอนแบบร่วมมือ มีการวัดประเมินผลที่หลากหลายตามสภาพจริง มีทั้งหมดจำนวน 15 แผน จำนวน 2 หน่วยการเรียนรู้ ดังนี้

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ลำดับและอนุกรมอนันต์ (แผนที่ 1 – 2)

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น (แผนที่ 3 – 15)

อนึ่งผู้เขียนหวังว่าแผนการจัดการเรียนรู้เล่มนี้ คงจะมีประโยชน์ต่อครูผู้สอนรายวิชาคณิตศาสตร์หรือรายวิชาอื่น ๆ บ้างไม่มากนัก้อย ในการใช้เป็นแนวทางในการดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ขอขอบคุณทุกท่านที่ให้คำปรึกษา แนะนำและให้การสนับสนุน ตลอดจนให้กำลังใจเป็นอย่างดี

(นายสุเมธ จันทรมบัติ)

ครู โรงเรียนสตรีศึกษา

สารบัญ

	หน้า
ส่วนที่ 1 การวิเคราะห์หลักสูตรและกำหนดการสอน	1
คำอธิบายรายวิชา	8
โครงสร้างรายวิชา	9
ตารางแสดงตัวชี้วัดและน้ำหนักคะแนน	10
กำหนดการจัดการเรียนรู้	12
ส่วนที่ 2 แผนการจัดการเรียนรู้	13
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ลำดับและอนุกรมอนันต์	14
ปฐมนิเทศ	15
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1	17
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2	28
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น	46
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3	47
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4	64
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5	80
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6	91
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7	103
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8	118
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9	143
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10	155
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11	171
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12	193
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13	204
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 14	227
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 15	238

การวิเคราะห์หลักสูตรและกำหนดการสอน

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ฉบับปรับปรุง 2560

วิสัยทัศน์

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน มุ่งพัฒนาผู้เรียนทุกคนซึ่งเป็นกำลังของชาติให้เป็นมนุษย์ที่มีความสมดุลทั้งร่างกาย ภูมิปัญญา คุณธรรม มีจิตสำนึกในการเป็นพลเมืองไทย และเป็นพลโลก ยึดมั่นในการปกครองตามระบอบประชาธิปไตยอันมีพระมหากษัตริย์ทรงเป็นประมุข มีความรู้และทักษะพื้นฐาน รวมทั้งเจตคติที่จำเป็นต่อการศึกษาค้นคว้า การประกอบอาชีพและการศึกษาตลอดชีวิต โดยมุ่งเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญบนพื้นฐานความเชื่อว่า ทุกคนสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้เต็มตามศักยภาพ

หลักการ

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน มีหลักการที่สำคัญ ดังนี้

1. เป็นหลักสูตรแกนกลางการศึกษาเพื่อความเป็นเอกภาพของชาติ มีจุดมุ่งหมายและมาตรฐานการเรียนรู้ เป็นเป้าหมายสำหรับพัฒนาเด็กและเยาวชนให้มีความรู้ ทักษะ เจตคติ และคุณธรรมบนพื้นฐานของความเป็นไทยควบคู่กับความ เป็นสากล
2. เป็นหลักสูตรการศึกษาเพื่อปวงชน ที่ประชาชนทุกคนมีโอกาสดำเนินการศึกษาอย่างเสมอภาคและมีคุณภาพ
3. เป็นหลักสูตรการศึกษาที่สนองการกระจายอำนาจ ให้สังคมมีส่วนร่วมในการจัดการศึกษาให้สอดคล้องกับสภาพ และความต้องการของท้องถิ่น
4. เป็นหลักสูตรการศึกษาที่มีโครงสร้างยืดหยุ่นทั้งด้านสาระการเรียนรู้ เวลาและการจัดการเรียนรู้
5. เป็นหลักสูตรการศึกษาที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ
6. เป็นหลักสูตรการศึกษาสำหรับการศึกษาในระบบ นอกระบบ และตามอัธยาศัย ครอบคลุมทุกกลุ่มเป้าหมาย สามารถเทียบโอนผลการเรียนรู้ และประสบการณ์



ส่วนที่ 1

การวิเคราะห์หลักสูตร



จุดมุ่งหมาย

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน มุ่งพัฒนาผู้เรียนให้เป็นคนดี มีปัญญา มีความสุข มีศักยภาพในการศึกษาต่อและประกอบอาชีพ จึงกำหนดเป็นจุดหมายเพื่อให้เกิดกับผู้เรียน เมื่อจบการศึกษาขั้นพื้นฐาน ดังนี้

1. มีคุณธรรม จริยธรรม และค่านิยมที่พึงประสงค์ เห็นคุณค่าของตนเอง มีวินัย และปฏิบัติตามหลักธรรมของพระพุทธศาสนา หรือศาสนาที่ตนนับถือ ยึดหลักปรัชญาของเศรษฐกิจพอเพียง
2. มีความรู้ ความสามารถในการสื่อสาร การคิด การแก้ปัญหา การใช้เทคโนโลยี และมีทักษะชีวิต
3. มีสุขภาพกาย และสุขภาพจิตที่ดี มีสุขนิสัย และรักการออกกำลังกาย
4. มีความรักชาติ มีจิตสำนึกในความเป็นพลเมืองไทย และพลโลก ยึดมั่นในวิถีชีวิตและการปกครองตามระบอบประชาธิปไตยอันมีพระมหากษัตริย์ทรงเป็นประมุข
5. มีจิตสำนึกในการอนุรักษ์วัฒนธรรม และภูมิปัญญาไทย การอนุรักษ์ และพัฒนาสิ่งแวดล้อม มีจิตสาธารณะที่มุ่งทำประโยชน์ และสร้างสิ่งที่ดีงามในสังคม และอยู่ร่วมกันในสังคมอย่างมีความสุข

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

วิสัยทัศน์กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

กลุ่มสาระคณิตศาสตร์ มุ่งเน้นให้นักเรียนเป็นคนดี มีทักษะ กระบวนการคิด การแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบและสร้างองค์ความรู้ได้อย่างเหมาะสม เต็มตามศักยภาพ

หลักการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์

1. พัฒนาความรู้ ความสามารถทางคณิตศาสตร์ตามศักยภาพของผู้เรียน และสามารถนำไปเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สิ่งต่างๆ และเป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษาต่อ
2. จัดกิจกรรมกระบวนการเรียนรู้อย่างหลากหลายต่อเนื่อง มีส่วนร่วมในการจัดกระบวนการเรียนรู้อย่างมีความสุข
3. จัดแผนการเรียนการสอนให้แก่ผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนได้มีโอกาสเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ตามความถนัดและความสนใจ
4. พัฒนาบุคลากรของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ให้มีความรู้และทักษะตลอดจนนำผลประสบการณ์มาใช้ในการเรียนการสอนโดยเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ
5. มีการนิเทศและติดตามอย่างเป็นระบบในด้านการเรียนการสอนคณิตศาสตร์
6. จัดการเรียนการสอนโดยการสอดแทรกคุณธรรม จริยธรรม ในทุกรายวิชาอย่างเป็นรูปธรรม
7. จัดกิจกรรมสัปดาห์วิชาการ ให้นักเรียนกล้าแสดงออก และได้ปฏิบัติกิจกรรมต่างๆ ตามความถนัดและความสนใจ
8. จัดให้ห้องปฏิบัติการคณิตศาสตร์ มีมุมหนังสือ-เอกสาร มุมศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง ป้ายนิเทศ มุ่งสื่อนวัตกรรม อุปกรณ์และเกม เพื่อเป็นแหล่งเรียนรู้ และส่งเสริมสนับสนุนให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการจัดห้องด้วย
9. จัดกิจกรรม นำเสนอผลงานนักเรียน-ครู ในงานนิทรรศการทางวิชาการภายในโรงเรียน
10. สนับสนุน ส่งเสริมให้ครู ผลิตสื่อและนวัตกรรมประกอบการเรียนการสอนตามเนื้อหา การเรียนรู้
11. จัดกิจกรรมส่งเสริม พัฒนาผู้เรียนที่มีความสามารถ และช่วยเหลือผู้เรียนที่มีปัญหาด้านการเรียนรู้คณิตศาสตร์

12. วัดผลและประเมินผลตามสภาพจริง ด้วยวิธีการที่หลากหลาย ให้ครอบคลุมทั้งทางด้านความรู้ ทักษะ/ กระบวนการ สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

จุดมุ่งหมายการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

1. มีคุณธรรม จริยธรรม และค่านิยมที่พึงประสงค์ เห็นคุณค่าของตนเอง มีวินัย และปฏิบัติตามหลักธรรมของพระพุทธศาสนา หรือศาสนาที่ตนนับถือ ยึดหลักปรัชญาของเศรษฐกิจพอเพียง
2. มีความรู้ ความสามารถในการสื่อสาร การคิด การแก้ปัญหา การใช้เทคโนโลยี และมีทักษะชีวิต
3. มีสุขภาพกายและสุขภาพจิตที่ดี มีสุขนิสัย และรักการออกกำลังกาย
4. มีความรักชาติ มีจิตสำนึกในความเป็นพลเมืองไทยและพลโลก ยึดมั่นในวิถีชีวิตและการปกครองตามระบอบประชาธิปไตยอันมีพระมหากษัตริย์ทรงเป็นประมุข
5. มีจิตสำนึกในการอนุรักษ์วัฒนธรรมและภูมิปัญญาไทย การอนุรักษ์และพัฒนาสิ่งแวดล้อม มีจิตสาธารณะที่มุ่งทำประโยชน์และสร้างสิ่งที่ดีงามในสังคม และอยู่ร่วมกันในสังคมอย่างมีความสุข

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

ในการพัฒนาผู้เรียนตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน มุ่งเน้นพัฒนาผู้เรียนให้มีคุณภาพตามมาตรฐานที่กำหนด ซึ่งจะช่วยให้ผู้เรียนเกิดสมรรถนะสำคัญและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน มุ่งให้ผู้เรียนเกิดสมรรถนะสำคัญ 5 ประการ ดังนี้

1. ความสามารถในการสื่อสาร เป็นความสามารถในการรับและส่งสาร มีวัฒนธรรมในการใช้ภาษาถ่ายทอดความคิด ความรู้ความเข้าใจ ความรู้สึก และทัศนะของตนเองเพื่อแลกเปลี่ยนข้อมูลข่าวสารและประสบการณ์อันจะเป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาตนเองและสังคม รวมทั้งเจรจาต่อรองเพื่อขจัดและลดปัญหาความขัดแย้งต่างๆ การเลือกรับหรือไม่รับข้อมูลข่าวสารด้วยหลักเหตุผลและความถูกต้อง ตลอดจนการเลือกใช้วิธีการสื่อสาร ที่มีประสิทธิภาพโดยคำนึงถึงผลกระทบที่มีต่อตนเองและสังคม
2. ความสามารถในการคิด เป็นความสามารถในการคิดวิเคราะห์ การคิดสังเคราะห์ การคิดอย่างสร้างสรรค์ การคิดอย่างมีวิจารณญาณ และการคิดเป็นระบบ เพื่อนำไปสู่การสร้างองค์ความรู้หรือสารสนเทศเพื่อการตัดสินใจเกี่ยวกับตนเองและสังคมได้อย่างเหมาะสม
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา เป็นความสามารถในการแก้ปัญหาและอุปสรรคต่างๆ ที่เผชิญได้อย่างถูกต้องเหมาะสมบนพื้นฐานของหลักเหตุผล คุณธรรมและข้อมูลสารสนเทศ เข้าใจความสัมพันธ์และการเปลี่ยนแปลงของเหตุการณ์ต่างๆ ในสังคม แสวงหาความรู้ ประยุกต์ความรู้มาใช้ในการป้องกันและแก้ไขปัญหา และมีการตัดสินใจที่มีประสิทธิภาพโดยคำนึงถึงผลกระทบที่เกิดขึ้นต่อตนเอง สังคมและสิ่งแวดล้อม

กระบวนการแก้ปัญหา การประเมินผลถูกออกแบบอย่างรอบคอบ ชนิดที่ว่าผลที่นักเรียนแสดงออกมา จะชี้บอกถึงระดับความสามารถของนักเรียนที่จะเผชิญหน้ากับปัญหาและการแก้ปัญหาอย่างมีประสิทธิภาพ โดยนักเรียนจะต้องแสดงออกว่ามีความสามารถที่จะ

1. เข้าใจปัญหา รวมทั้งการเข้าใจเรื่องราวสาระจากข้อเขียน แผนผัง สูตร ตารางและสามารถอ้างอิง เชื่อมสาระจากแหล่งต่างๆ แสดงออกว่าเข้าใจแนวคิดที่เกี่ยวข้องใช้สาระจากพื้นฐานความรู้เดิมของตน เพื่อทำความเข้าใจกับสาระเรื่องราวที่กำหนดให้

2. บอกลักษณะปัญหา รวมทั้งการระบุบอกตัวแปรในปัญหา และตั้งข้อสังเกตถึงความเชื่อมโยงเกี่ยวข้องระหว่างตัวแปร ตัดสินใจว่าตัวแปรใดใช้ได้หรือไม่ได้ สร้างสมมติฐานและค้นคว้าสาระ จัดกระทำ พิจารณาและประเมินสาระที่มีอยู่

3. แสดงการนำเสนอการแก้ปัญหา รวมทั้งการสร้างตาราง กราฟ สัญลักษณ์ การพูด

4. ลงมือแก้ปัญหารวมถึงการตัดสินใจ วิเคราะห์ระบบ หรือออกแบบระบบเพื่อนำไปสู่เป้าหมายหรือวิเคราะห์ วินิจฉัยและเสนอวิธีการแก้ปัญหา

5. สะท้อนการแก้ปัญหา รวมถึงการตรวจสอบการแก้ปัญหาและมองหาสาระข้อมูลเพิ่มเติม หรือเพิ่มคำอธิบายให้ชัดเจนยิ่งขึ้น ประเมินการแก้ปัญหาจากมุมมองต่างๆ หรือหาวิธีแก้ปัญหาใหม่ และให้เป็นที่ยอมรับมากขึ้น หรือเพื่อให้สามารถอธิบายได้

6. สื่อสารการแก้ปัญหา รวมถึงการเลือกสื่อและการนำเสนอที่เหมาะสม เพื่อบอกกล่าวและสื่อสารการแก้ปัญหาให้คนนอกได้รับรู้

4. ความสามารถในการใช้ทักษะชีวิต เป็นความสามารถในการนำกระบวนการต่างๆ ไปใช้ในการดำเนินชีวิตประจำวัน การเรียนรู้ด้วยตนเอง การเรียนรู้อย่างต่อเนื่อง การทำงาน และการอยู่ร่วมกันในสังคมด้วยการสร้างเสริมความสัมพันธ์อันดีระหว่างบุคคล การจัดการปัญหาและความขัดแย้งต่างๆ อย่างเหมาะสม การปรับตัวให้ทันกับการเปลี่ยนแปลงของสังคม และสภาพแวดล้อม และการรู้จักหลีกเลี่ยงพฤติกรรมไม่พึงประสงค์ที่ส่งผลกระทบต่อตนเองและผู้อื่น

5. ความสามารถในการใช้เทคโนโลยี เป็นความสามารถในการเลือก และใช้เทคโนโลยีด้านต่างๆ และมีทักษะกระบวนการทางเทคโนโลยี เพื่อการพัฒนาตนเองและสังคม ในด้านการเรียนรู้ การสื่อสาร การทำงาน การแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ ถูกต้อง เหมาะสม และมีคุณธรรม

คุณลักษณะอันพึงประสงค์

จากข้อสรุปของผู้ทรงคุณวุฒิทางการศึกษาสรุปได้ว่า คุณลักษณะอันพึงประสงค์เป็นลักษณะของคนดี คือ คนที่ดำเนินชีวิตอย่างมีคุณภาพ มีจิตใจที่ดีงาม มีคุณธรรม จริยธรรม และได้สรุปสาระคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ดังนี้

1. รักชาติ ศาสน์ กษัตริย์ หมายถึง มีความภาคภูมิใจในความเป็นไทย นิยมไทย ปฏิบัติตามคำสั่งสอนของศาสนา เคารพเทิดทูนศาสนา แสดงความจงรักภักดี เทิดทูนพระเกียรติและพระราชกรณียกิจของพระมหากษัตริย์

2. ซื่อสัตย์สุจริต หมายถึง การประพฤติปฏิบัติอย่างเหมาะสม และตรงต่อความเป็นจริง ประพฤติปฏิบัติอย่างตรงไปตรงมา ทั้งกาย วาจา ใจ ต่อตนเองและผู้อื่น รวมตลอดทั้งต่อหน้าที่การงานและคำมั่นสัญญา ความประพฤติที่ตรงไปตรงมาและจริงจังในสิ่งที่ถูกที่ควร ถูกต้องตามทำนองคลองธรรม รวมถึงการไม่คิดคดทรยศ ไม่คดโกงและไม่หลอกลวง นอกจากนี้แล้วความซื่อสัตย์สุจริตยังรวมไปถึงการรักษาคำพูดหรือคำมั่นสัญญา และการปฏิบัติหน้าที่การงานของตนเองด้วยความรับผิดชอบ และด้วยความซื่อสัตย์ไม่แสวงหาผลประโยชน์ให้แก่ตนเองและพวกพ้องด้วยการใช้อำนาจหน้าที่โดยมิชอบ ซึ่ง

ความซื่อสัตย์สุจริตนี้จะดำเนินไปด้วยความตั้งใจจริงเพื่อทำหน้าที่ของตนเองให้สำเร็จลุล่วงด้วยความระมัดระวังและเกิดผลดีต่อตนเองและสังคม

3. มีวินัย หมายถึง การควบคุมความประพฤติให้ถูกต้องและเหมาะสมกับจรรยาบรรณ ข้อบังคับ ข้อตกลง กฎหมาย และศีลธรรมการรู้จักควบคุมตนเองให้ประพฤติปฏิบัติตามข้อตกลง ข้อบังคับ ระเบียบแบบแผน และ ขนบธรรมเนียมประเพณีอันดีงาม ย่อมนำมาซึ่งความสงบสุขในชีวิตของตน ความเป็นระเบียบเรียบร้อยของสังคมและ ประเทศชาติ

4. ใฝ่เรียนรู้ หมายถึง การค้นคว้าหาความรู้หรือสิ่งที่เป็นประโยชน์ เพื่อพัฒนาตนเองอยู่เสมอ

5. อยู่อย่างพอเพียง หมายถึง การมีความพอดีในการบริโภค ใช้ทรัพยากรและเวลาว่างให้เป็นประโยชน์ คำนึงถึง ฐานะและเศรษฐกิจ คิดก่อนใช้จ่ายตามเหมาะสม รู้จักการเพิ่มพูนทรัพย์ ด้วยการเก็บและนำไปใช้ให้เกิดประโยชน์ ดูแลรักษา บุรณทรัพย์ของตนเอง มีการเก็บออมเงินไว้ตามสมควร

6. มุ่งมั่นในการทำงาน หมายถึง การศึกษาเรียนรู้เพื่อหาข้อเท็จจริง ซึ่งอาจพัฒนาไปสู่ความจริง ในสิ่งที่ต้องการ เรียนรู้ หรือต้องการหาคำตอบ เพื่อนำคำตอบที่ได้นั้นมาใช้ประโยชน์ ในด้านต่างๆ เช่น การยกระดับความรู้ การนำไป ประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน ฯลฯ หรือนำมาสรุปเป็นความจริงให้ได้

7. รักความเป็นไทย หมายถึง เข้าใจ ห่วงแหนความเป็นไทยซึ่งถือเป็นต้นทุนทางสังคม ทำให้ทุกศาสนา สามารถ อยู่ร่วมกันได้อย่างสันติโดยต้องมีการดำเนินชีวิตโดยกายสุจริต วาสุจริต และมโนสุจริต เป็นคุณลักษณะที่เกี่ยวข้องกับการเข้า สังคมและการมีปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่น เช่น ความมีกิริยามารยาท การปรับตัว ความตรงต่อเวลา ความสุภาพ การมีสัมมา คารวะ การพูดจาไพเราะ และความอ่อนน้อมถ่อมตน

8. มีจิตสาธารณะ หมายถึง คุณลักษณะทางจิตใจของบุคคลเกี่ยวกับการมองเห็นคุณค่า หรือการให้คุณค่าแก่การมี ปฏิสัมพันธ์ทางสังคม และสิ่งต่างๆ ที่เป็นสิ่งสาธารณะที่ไม่มีผู้ใดผู้หนึ่งเป็นเจ้าของ หรือเป็นสิ่งที่คนในสังคมเป็นเจ้าของร่วมกัน เป็นสิ่งที่สามารถสังเกตได้จากความรู้สึกนึกคิด หรือการกระทำที่แสดงออกมา ได้แก่ การหลีกเลี่ยงการใช้หรือการกระทำที่จะ ทำให้เกิดความชำรุดเสียหายต่อส่วนรวมที่ใช้ประโยชน์ร่วมกันของกลุ่ม การถือเป็นหน้าที่ที่จะมีส่วนร่วมในการดูแลรักษาของ ส่วนรวมที่วิสัยทัศน์สามารถทำได้ และการเคารพสิทธิในการใช้ของส่วนรวมที่เป็นประโยชน์ร่วมกันของกลุ่ม

จากหลักสูตรสถานศึกษา ได้กำหนดคุณลักษณะเพิ่มเติม อีก 2 ข้อ ดังนี้

9. มีความกตัญญู เป็นการทำให้พ่อแม่ภูมิใจในตัวเรา ไม่สร้างความไม่สบายใจให้พ่อแม่ หรือผู้มีพระคุณ ไม่ทะเลาะ เบาะแว้งกับบุคคลในครอบครัว ช่วยแบ่งเบาภาระหน้าที่การงานต่างๆ จากพ่อแม่ ตอบแทนบุญคุณผู้มีพระคุณทุกครั้งเมื่อมี โอกาส

10. มีสัมมาคารวะ เป็นคนพูดจาไพเราะ มีทางเสียง ใหว่พ่อแม่ญาติผู้ใหญ่ ผู้อาวุโส เดินผ่านผู้ใหญ่ก้มตัวลงเป็น ตัวอย่างแก่ผู้อื่นได้ มีกิริยามารยาทในการยืน การเดิน การนั่ง ที่สุภาพเรียบร้อยตามแบบอย่างวัฒนธรรมไทย ไม่พูดคำ หยาบหรือใช้คำที่ไม่เหมาะสม มีวาจาสุภาพ รู้จักกล่าวขอบคุณ ขอโทษ ตามโอกาส ใหว่และกล่าวคำทักทายโดยไม่ต้องบอก

สาระและมาตรฐานการเรียนรู้สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ กลุ่มวิชาพื้นฐาน

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจถึงความหลากหลายของการแสดงจำนวนและการใช้จำนวนในชีวิตจริง

มาตรฐาน ค 1.2 เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างการดำเนินการต่างๆ และสามารถใช้ในการดำเนินการในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 1.3 ใช้การประมาณค่าในการคำนวณและแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 1.4 เข้าใจระบบจำนวนและนำเสนอสมบัติเกี่ยวกับจำนวนไปใช้

สาระที่ 2 การวัด

มาตรฐาน ค 2.1 เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัด

มาตรฐาน ค 2.2 แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัด

สาระที่ 3 เรขาคณิต

มาตรฐาน ค 3.1 อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ

มาตรฐาน ค 3.2 ใช้การนิยามภาพ (Visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (Spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต(Geometric Model) ในการแก้ปัญหา

สาระที่ 4 พีชคณิต

มาตรฐาน ค 4.1 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป(Pattern) ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

มาตรฐาน ค 4.2 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์(Mathematical Model) อื่นๆ แทนสถานการณ์ต่างๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหา

สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น

มาตรฐาน ค 5.1 เข้าใจและใช้วิธีการทางสถิติในการวิเคราะห์ข้อมูล

มาตรฐาน ค 5.2 ใช้วิธีการทางสถิติและความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ได้อย่างสมเหตุสมผล

มาตรฐาน ค 5.3 ใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นช่วยในการตัดสินใจและแก้ปัญหา

สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

คำอธิบายรายวิชา

สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

ภาคเรียนที่ 1

วิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 จำนวน 80 ชั่วโมง/ภาคเรียน จำนวน 2.0 หน่วยการเรียนรู้

ศึกษา พร้อมทั้งฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาของสาระ ดังนี้

ลำดับและอนุกรม ลำดับ ลิมิตของลำดับอนันต์ อนุกรม สัญลักษณ์แสดงการบวก การประยุกต์ของลำดับและอนุกรม

แคลคูลัสเบื้องต้น ลิมิตของฟังก์ชัน ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ เส้นสัมผัสเส้นโค้ง อนุพันธ์อันดับสูง การประยุกต์ของอนุพันธ์ ปริยานุพันธ์และปริพันธ์ ไม่จำกัดเขต ปริพันธ์จำกัดเขต พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

โดยจัดประสบการณ์ให้ผู้เรียนได้พัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ อันได้แก่ การแก้ปัญหา การสื่อสาร และการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยง การให้เหตุผล และการคิดสร้างสรรค์

การใช้สื่อ อุปกรณ์ เทคโนโลยี และแหล่งข้อมูล และนำประสบการณ์ ตลอดจนทักษะและกระบวนการที่ได้ ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่างๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์ รวมทั้งเห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบ มีความรอบคอบ และมีวิจรรย์ญาณ

การวัดผลประเมินผล ใช้วิธีการที่หลากหลายตามสภาพความเป็นจริงให้สอดคล้องกับเนื้อหาและทักษะที่ต้องการวัด

รหัสตัวชี้วัด

ค 6.1 ม.6/1-6

ผลการเรียนรู้

1. ระบุได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก
2. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต
3. หาผลบวกอนุกรมอนันต์
4. เข้าใจและนำความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมไปใช้
5. ตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่กำหนดให้
6. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา
7. หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและจำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้ และนำไปใช้แก้ปัญหา

โครงสร้าง รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

ภาคเรียนที่ 1 เวลา 80 ชั่วโมง จำนวน 2.0 หน่วยการเรียนรู้

ลำดับ ที่	ชื่อหน่วย การเรียนรู้	มาตรฐานการ เรียนรู้/ตัวชี้วัด	สาระสำคัญ	เวลา (ชั่วโมง)	น้ำหนัก คะแนน
1	ลำดับและ อนุกรม	ค 6.1 ม.6/1-6	ความหมายของลำดับ	8	
			ลำดับเลขคณิต		
			ลำดับเรขาคณิต		
			ลำดับฮาร์โมนิก		
			ลิมิตของลำดับอนันต์	10	
			อนุกรม		
			อนุกรมเลขคณิต		
			อนุกรมเรขาคณิต		
			อนุกรมอนันต์		
			สัญลักษณ์แทนการบวก		
			การประยุกต์ของลำดับและอนุกรม		
2	แคลคูลัส เบื้องต้น	ค 6.1 ม.6/1-6	ลิมิตของฟังก์ชัน	2	
			ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	2	
			อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	2	
			การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร	8	
			อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ	2	
			เส้นสัมผัสโค้ง		
			อนุพันธ์อันดับสูง	1	
			การประยุกต์ของอนุพันธ์	8	
			ปริพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต	8	
			ปริพันธ์จำกัดเขต	2	
			พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง	4	

ตารางแสดงตัวชี้วัดและน้ำหนักคะแนน

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค33205 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1

อัตราส่วนคะแนน 70 : 30

ตัวชี้วัด	การวัดผลและประเมินผล					
	วัดผลก่อนกลางภาค	วัดผลกลางภาค	วัดผลหลังกลางภาค	คุณลักษณะ	วัดผลปลายภาค	รวมคะแนนทั้งหมด
ลำดับและอนุกรม						
1. ระบุได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก	4	4	-	-	2	10
2. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต	4	4	-	-	2	10
3. หาผลบวกอนุกรมอนันต์	4	4	-	-	2	10
4. เข้าใจและนำความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมไปใช้	4	4	-	-	2	10
5. ตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่กำหนดให้	4	4	-	-	2	10
แคลคูลัสเบื้องต้น						
6. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา	-	-	10	-	10	20
7. หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและจำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้ และนำไปใช้แก้ปัญหา	-	-	10	-	10	20
คุณลักษณะอันพึงประสงค์	-	-	-	10	-	10
รวม	20	20	20	10	30	100

หน่วยการเรียนรู้

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1

จำนวนหน่วยการเรียนรู้ 2.0 หน่วยการเรียนรู้

เวลา 80 ชั่วโมง

หน่วยการเรียนรู้	ชื่อหน่วยการเรียนรู้/หน่วยย่อยการเรียนรู้	จำนวนชั่วโมง
	ทดสอบก่อนเรียน	1
1	ลำดับและอนุกรม	18
	1.1 ลำดับ	1
	1.1.1 ความหมายของลำดับ	1
	1.1.2 ลำดับเลขคณิต	2
	1.1.3 ลำดับเรขาคณิต	2
	1.1.4 ลำดับฮาร์มอนิก	1
	1.2 LIMIT ของลำดับอนันต์	2
	1.3 อนุกรม	4
	1.3.1 อนุกรมเลขคณิต	
	1.3.2 อนุกรมเรขาคณิต	
	1.3.3 อนุกรมอนันต์	4
	1.4 สัญลักษณ์แทนการบวก	2
	1.5 การประยุกต์ของลำดับและอนุกรม	
2	แคลคูลัสเบื้องต้น	52
	2.1 LIMIT ของฟังก์ชัน	4
	2.2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	4
	2.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	6
	2.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร	8
	2.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ	2
	ทดสอบระหว่างภาคเรียน	1
	2.6 เส้นสัมผัสเส้นโค้ง	
	2.7 อนุพันธ์อันดับสูง	1
	2.8 การประยุกต์ของอนุพันธ์	8
	2.9 ปริยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต	4
	2.10 ปริพันธ์จำกัดเขต	2
	2.11 พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง	4
	ทดสอบปลายภาค	1
	รวมตลอดภาคเรียน	80

กำหนดการจัดการเรียนรู้

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1

จำนวนหน่วยการเรียนรู้ 2.0 หน่วยการเรียนรู้

เวลา 80 ชั่วโมง

แผนการจัดการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	เวลา (ชั่วโมง)
	ปฐมนิเทศและทดสอบก่อนเรียน	1
1. ลำดับและอนุกรมอนันต์		
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1	ลำดับอนันต์	8
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2	อนุกรมอนันต์	10
2. แคลคูลัสเบื้องต้น		
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3	ลิมิต	4
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4	ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	4
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5	อัตราการเปลี่ยนแปลง	2
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6	การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้นิยาม	4
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7	ความชันของเส้นโค้ง	2
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8	การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร	8
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9	อนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท	2
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10	อนุพันธ์อันดับสูง	1
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11	การประยุกต์ของอนุพันธ์	8
	ทดสอบระหว่างภาคเรียน	1
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12	ปริพันธ์	4
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13	ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต	8
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 14	ปริพันธ์จำกัดเขต	2
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 15	พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง	4
	ทดสอบปลายภาคเรียน	1
	รวม	80



ส่วนที่ 2

แผนการจัดการเรียนรู้





หน่วยเรียนรู้ที่ 1

ลำดับและอนุกรมอนันต์

ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เวลา 18 ชั่วโมง



แผนการจัดการเรียนรู้

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1
 หน่วยการเรียนรู้ที่ จำนวน 4 ชั่วโมง
 เรื่อง ปฐมนิเทศ จำนวน 1 ชั่วโมง
 ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่
 ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

1. ผู้สอน นางสาวนิภาพร นาอ่อน
2. หน่วยการเรียนรู้ 2.0 หน่วยการเรียนรู้
3. จำนวนชั่วโมงเรียน 4 ชั่วโมง/สัปดาห์ 80 ชั่วโมง/ ภาคเรียน
4. การวัดผลและประเมินผล
 - 4.1 อัตราส่วนของคะแนนระหว่างภาคเรียน:ปลายภาค = 70 : 30
 คะแนนระหว่างภาคเรียน ประกอบด้วย
 - คะแนนรายจุดประสงค์ (หน่วยการเรียนรู้ที่ 1-3) ซึ่งประเมินทั้ง 3 ด้าน คือ

ด้านความรู้	ด้านทักษะกระบวนการ	และด้านคุณลักษณะ	50 คะแนน
-------------	--------------------	------------------	----------
 - คะแนนสอบกลางภาค 20 คะแนน
 - คะแนนสอบปลายภาค 30 คะแนน
 - 4.2 การประเมินการอ่าน คิด วิเคราะห์ เขียน ต้องผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำตามที่โรงเรียนกำหนด
 - 4.3 การประเมินคุณลักษณะต้องผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำตามที่กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์และโรงเรียนกำหนด
5. เกณฑ์การให้ระดับผลการเรียน มีดังนี้

0 – 49	ได้รับระดับผลการเรียน	0
50-54	ได้รับระดับผลการเรียน	1
55-59	ได้รับระดับผลการเรียน	1.5
60-64	ได้รับระดับผลการเรียน	2
65-69	ได้รับระดับผลการเรียน	2.5
70-74	ได้รับระดับผลการเรียน	3
75-79	ได้รับระดับผลการเรียน	3.5
80-100	ได้รับระดับผลการเรียน	4
6. เวลาเรียน
 นักเรียนต้องมีเวลาเรียน ไม่น้อยกว่า 80% คือ ไม่ต่ำกว่า 62 ชั่วโมง และขาดได้ไม่เกิน 18 ชั่วโมง
7. กำหนดเวลาเรียน
 เรียนสัปดาห์ละ 2 ชั่วโมง ภายในช่วงวันจันทร์ – ศุกร์ ถ้าเวลาเรียนไม่ครบ 40 ชั่วโมง ต่อภาคเรียน ต้องเรียนชดเชยในเวลารว่างหรือวันหยุด เพื่อให้ครบตามที่ระบุไว้
8. อุปกรณ์การเรียน
 สมุดปกแข็ง 1 เล่ม สำหรับ จดงานและทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติม เพื่อส่งเสริมความแม่นยำในการเรียนรู้ตามที่ได้รับมอบหมายในแต่ละชั่วโมง
9. จุดประสงค์การเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม
รหัสวิชา ค 33205
ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6

แบบทดสอบก่อน/หลังเรียน

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
เรื่อง - ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
- อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
- ปฏิยานุพันธ์

- คำชี้แจง 1. ให้นักเรียน เขียน ชื่อ ชั้น เลขที่ ในกระดาษคำตอบที่แจกให้
2. เวลาที่ใช้ในการสอบ 1 ชั่วโมง
3. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำทุกข้อ

1. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 27x + 36}{x^2 + 3x - 4}$

2. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} & \text{เมื่อ } x \neq 4 \\ 3k & \text{เมื่อ } x = 4 \end{cases}$
จงหาค่า k ที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 4$

3. กำหนดให้ $y = 6x^3 - 5x^2 + x - 3$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ $x = 4$

4. จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งขนานกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 - 2x + 4$ ที่จุด $(-2, 5)$ และผ่านจุด $(-4, 3)$

5. กำหนดให้ $f(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$ และ $g(x) = \sqrt{3x^2+1}$ จงหาอนุพันธ์ของ $[f(x) + g(x)]$ ที่ $x = 1$

6. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ กับแกน X

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ลำดับและอนุกรม

จำนวน 18 ชั่วโมง

เรื่อง ลำดับ

จำนวน 8 ชั่วโมง

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

1. มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย ทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2. ตัวชี้วัด

ค 6.1 ม.6/1 ให้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

ค 6.1 ม.6/2 ให้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/3 ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/4 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

ค 6.1 ม.6/5 เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และนำความรู้ หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ

ค 6.1 ม.6/6 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

3. สาระสำคัญ

ความหมายของลำดับ

รูปแบบการกำหนดลำดับ

ลำดับเลขคณิต

ลำดับเรขาคณิต

4. จุดประสงค์การเรียนรู้ (K-P-A)

ด้านความรู้ (K): นักเรียนสามารถ

1) เข้าใจความหมายของลำดับ

2) หาพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิตได้

ด้านทักษะและกระบวนการ (P) : นักเรียนเกิดทักษะดังนี้

1) มีการแก้ปัญหา

2) มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

3) มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : นักเรียนสามารถ

- 1) คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง
- 2) นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กะทัดรัด ชัดเจน และตรงประเด็น
- 3) ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย

5. สารการเรียนรู้

ลำดับอนันต์

ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ หรือมีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$

เรียก ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ว่าลำดับจำกัด (finite sequence) และ

เรียก ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ ว่าลำดับอนันต์(infinite sequence)

ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับที่มีผลต่างที่ได้จากการนำพจน์ที่ $n + 1$ ลบด้วยพจน์ที่ n เป็น ค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับจำนวนเต็มบวก n และ เรียก ค่าคงตัวที่เป็นผลต่างนี้ว่า ผลต่างร่วม

ลำดับเรขาคณิต คือ ลำดับซึ่งมีอัตราส่วนของพจน์ที่ $n + 1$ ต่อ พจน์ที่ n เป็น ค่าคงที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และ เรียกค่าคงตัวที่เป็นอัตราส่วนนี้ว่า อัตราส่วนร่วม

ลำดับฮาร์มอนิก คือ ลำดับที่มีพจน์ แต่ละพจน์เป็นส่วนกลับของพจน์ในลำดับดับเลขคณิต

6. กิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

6.1 ครูให้นักเรียนอ่านบทนิยามของลำดับในหนังสือแบบเรียน หน้า 2 ดังนี้

บทนิยาม ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ หรือมีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ เรียก ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ว่า ลำดับจำกัด(finite sequence) และเรียกลำดับที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ ว่า ลำดับอนันต์(infinite sequence)

6.2 ครูสรุปจากบทนิยามเพิ่มเติมว่า ลำดับโดยทั่ว ๆ ไป แบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ

1. ลำดับจำกัด หมายถึง ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n จำนวนแรก คือ เซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ และเรนจ์คือเซต $\{f(1), f(2), f(3), \dots, f(n)\}$
2. ลำดับอนันต์ หมายถึง ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก คือ เซต $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ หรือเซตของจำนวนธรรมชาติ และเรนจ์คือเซต $\{(f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots)\}$

ขั้นสอน

6.3 ครูอธิบายตามหัวข้อที่ 1.1.2 รูปแบบการกำหนดลำดับแบบต่างๆ จากนั้นนำเสนอตัวอย่างต่อไปนี้เพิ่มเติม
ตัวอย่าง จงหา 5 พจน์แรกของลำดับ $\{a_n\}$ เมื่อ a_n มีค่าดังต่อไปนี้

$$a_n = 2n^2 - 3n$$

$$a_n = 2^n - 1$$

วิธีทำ 1. $a_n = 2n^2 - 3n$

$$a_1 = 2(1)^2 - 3(1) = 2 - 3 = -1$$

$$a_2 = 2(2)^2 - 3(2) = 8 - 6 = 2$$

$$a_3 = 2(3)^2 - 3(3) = 18 - 9 = 9$$

$$a_4 = 2(4)^2 - 3(4) = 32 - 12 = 20$$

$$a_5 = 2(5)^2 - 3(5) = 50 - 15 = 35$$

2. $a_n = 2^n - 1$

$$a_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$a_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$a_3 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$$

$$a_4 = 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$$

$$a_5 = 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$$

ตัวอย่าง จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับซึ่งมี 5 พจน์แรกดังต่อไปนี้

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, a_n, \dots$

2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, a_n, \dots$

วิธีทำ 1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, a_n, \dots$

$$a_1 = 1 = \frac{1}{1}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{1}{4}$$

$$a_5 = \frac{1}{5}$$

ดังนั้น $a_n = \frac{1}{n}$

2. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, a_n, \dots$

$$a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

$$a_2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1}$$

$$a_3 = \frac{3}{4} = \frac{3}{3+1}$$

$$a_4 = \frac{4}{5} = \frac{4}{4+1}$$

ดังนั้น $a_n = \frac{n}{n+1}$

6.4 ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 1.1 ก ข้อที่ 1 ภายในเวลาที่กำหนด จากนั้นเฉลยคำตอบร่วมกัน

6.5 ครูอธิบาย บทนิยามของลำดับเลขคณิต

บทนิยาม ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับซึ่งมีผลต่างที่ได้จากการนำพจน์ที่ $n + 1$ ลบด้วยพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียก ค่าคงตัวที่เป็นผลต่างนี้ว่า ผลต่างร่วม

แล้วอธิบายที่มาของสูตร $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ดังนี้

ถ้าให้ d แทนผลต่างร่วมระหว่างพจน์ที่ $n + 1$ กับพจน์ที่ n

จะได้ $d = a_{n-1} - a_n$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$

ถ้าให้ $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิตแล้ว

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_{n+1} - a_n = \dots$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$\vdots$

$$a_n = a_{n-1} + d = (a_1 + (n - 2)d) + d = a_1 + (n - 1)d$$

ดังนั้น เมื่อกำหนดให้ a_1 เป็นพจน์แรกของลำดับเลขคณิต และ d เป็นผลต่างร่วม พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต คือ

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

6.6 ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 1 ในหนังสือเรียน และยกตัวอย่างเพิ่มเติม ดังนี้

1) จงหาพจน์ที่ n ของลำดับต่อไปนี้

(1) $9, 13, 17, 21, \dots$

(2) $1, 1.5, 2, 2.5, 3, \dots$

วิธีทำ (1) $9, 13, 17, 21, \dots$

$$a_1 = 9, d = 13 - 9 = 17 - 13 = 21 - 17 = 4$$

พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$$\therefore a_n = 9 + (n - 1)4$$

$$= 9 + 4n - 4$$

$$= 5 + 4n = 4n + 5$$

(2) $1, 1.5, 2, 2.5, 3, \dots$

$$a_1 = 1, d = 1.5 - 1 = 2 - 1.5 = 2.5 - 2 = 0.5$$

จากสูตร $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$$\therefore a_n = 1 + (n - 1)0.5$$

$$= 1 + 0.5n - 0.5$$

$$= 0.5n + 0.5 = \frac{n+1}{2}$$

2) กำหนดลำดับเลขคณิต $24, 19, 14, 9, \dots, -46$ จงหาลำดับนี้มีกี่พจน์และพจน์ที่ 12 เป็นเท่าไร

วิธีทำ จากลำดับเลขคณิต $24, 19, 14, 9, \dots, -46$

$$a_1 = 24$$

$$d = 19 - 24 = 14 - 19 = 9 - 14 = \dots = -5$$

$$\text{และ } a_n = -46$$

จากสูตร $a_n = a_1 + (n - 1)d$

แทนค่า $-46 = 24 + (n - 1)(-5)$

$$-46 = 24 - 5n + 5$$

$$5n = 29 + 46 = 75$$

$$n = \frac{75}{5} = 15$$

พจน์ที่ 12 คือ $a_{12} = a_1 + (12 - 1)d$

$$= 24 + 11(-5)$$

$$= 24 - 55$$

$$= -31$$

ดังนั้น ลำดับ $24, 19, 14, 9, \dots, -46$ มี 15 พจน์

และ พจน์ที่ 12 เท่ากับ -31

6.7 การอธิบายนิยามของลำดับเรขาคณิต

บทนิยาม ลำดับเรขาคณิต คือ ลำดับซึ่งมีอัตราส่วนของพจน์ที่ $n + 1$ ต่อพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงตัวที่เป็นอัตราส่วนนี้ว่า อัตราส่วนร่วม

แล้วอธิบายที่มาของสูตร $a_n = a_1 r^{n-1}$ ดังนี้

ถ้าให้ r แทนอัตราส่วนร่วมระหว่างพจน์ที่ $n + 1$ กับ พจน์ที่ n

จะได้ $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ หรือ $ra_n = a_{n+1}$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots$$

$$a_2 = a_1 r$$

$$a_3 = a_2 r = (a_1 r) r = a_1 r^2 = a_1 r^{3-1}$$

$$a_4 = a_3 r = (a_1 r^2) r = a_1 r^3 = a_1 r^{4-1}$$

$\vdots$

$$a_n = a_{n-1} r = (a_1 r^{n-2}) r = a_1 r^{n-1}$$

ดังนั้น เมื่อกำหนดให้ a_1 เป็นพจน์แรกของลำดับเรขาคณิต และ r เป็นอัตราส่วนร่วม พจน์ที่ n ของลำดับ

เรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$

6.8 ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 2 ในหนังสือเรียน แล้วยกตัวอย่างเพิ่มเติม ดังนี้

1) จงหาพจน์ที่ n ของลำดับต่อไปนี้

$$12, 4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \dots$$

วิธีทำ $a_1 = 12, r = 4 \div 12 = \frac{4}{3} \div 4 = \frac{4}{9} \div \frac{4}{3} = \dots = \frac{1}{3}$

จากสูตร $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$= 12 \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

2) ลำดับเรขาคณิตลำดับหนึ่ง มีพจน์ที่ 3 มากกว่า พจน์ที่ 2 อยู่ $\frac{9}{14}$ และพจน์ที่ 2 มากกว่า พจน์แรกอยู่ $\frac{3}{7}$ จงหาพจน์ที่ n ของลำดับนี้

วิธีทำ จากโจทย์ $a_3 - a_2 = \frac{9}{14} \dots\dots\dots(1)$

$$\begin{aligned}
 a_1 r^2 - a_1 r &= \frac{9}{14} \\
 \text{และ} \quad a_2 - a_1 &= \frac{3}{7} \\
 a_1 r - a_1 &= \frac{3}{7} \\
 a_1(r-1) &= \frac{3}{7} \dots\dots\dots(2) \\
 (1) \div (2); \quad \frac{a_1 r(r-1)}{a_1(r-1)} &= \frac{9}{14} \div \frac{3}{7} \\
 r &= \frac{9}{14} \times \frac{7}{3} = \frac{3}{2} \\
 \text{แทนค่า } r \text{ ใน (2); } a_1 \left(\frac{3}{2} - 1\right) &= \frac{3}{7} \\
 \frac{1}{2} a_1 &= \frac{3}{7} \\
 a_1 &= \frac{6}{7} \\
 \text{พจน์ที่ } n; \quad a_n &= a_1 r^{n-1} \\
 \text{ดังนั้น} \quad a_n &= \frac{6}{7} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}
 \end{aligned}$$

6.9 ครูอธิบายเรื่องลำดับฮาร์โมนิกเพิ่มเติมจากหนังสือแบบเรียน ดังนี้

ลำดับฮาร์โมนิก หมายถึง ลำดับที่มีพจน์แต่ละพจน์เป็นส่วนกลับของพจน์ในลำดับเลขคณิต

ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต แล้ว $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$

เป็นลำดับฮาร์โมนิก โดยที่ $a_i \neq 0, i = 1, 2, 3, \dots$

ตัวอย่าง $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{2n+1}, \dots$ เป็นลำดับฮาร์โมนิกหรือไม่ ถ้าเป็น จงหาพจน์ที่ 15

วิธีทำ เนื่องจาก $3, 5, 7, \dots, 2n+1, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต

ดังนั้น $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{2n+1}, \dots$ เป็นลำดับฮาร์โมนิก

และ เนื่องจาก $a_n = 2n + 1 \quad a_{15} = 2(15) + 1 = 31$

พจน์ที่ 15 ในลำดับเลขคณิต เท่ากับ 31

ดังนั้น พจน์ที่ 15 ในลำดับฮาร์โมนิก คือ $\frac{1}{31}$

พจน์กลางของลำดับต่างๆ

1. ถ้า a, A, b เป็น 3 พจน์เรียงกันในลำดับเลขคณิต แล้ว พจน์กลาง $A = \frac{a+b}{2}$
2. ถ้า a, G, b เป็น 3 พจน์เรียงกันในลำดับเรขาคณิต แล้ว พจน์กลาง $G = \pm\sqrt{ab}$
3. ถ้า a, H, b เป็น 3 พจน์เรียงกันในลำดับฮาร์โมนิก แล้ว พจน์กลาง $H = \frac{2ab}{a+b}$
4. ถ้า A, G, H เป็นพจน์กลางของลำดับเลขคณิต เรขาคณิต และฮาร์โมนิก ตามลำดับ ระหว่าง a และ b แล้ว $AH = G^2$ และ ถ้า $a, b > 0$ แล้ว $A > G > H$

6.10 ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มทำกิจกรรมที่ 1.1ก กลุ่มละ 3 ข้อ แล้วนำคำตอบของแต่ละกลุ่มมาอภิปรายร่วมกัน
ขั้นสรุป

6.11 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปสูตรต่างๆ ดังนี้

1) พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต คือ

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

เมื่อ a_1 เป็นพจน์แรกของลำดับเลขคณิต และ d เป็นผลต่างร่วม

2) พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

เมื่อ a_1 เป็นพจน์แรกของลำดับเรขาคณิต และ r เป็นอัตราส่วนร่วม

7. สื่อ/ แหล่งเรียนรู้

7.1 ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

7.2 ห้องสมุดโรงเรียน

7.3 อินเทอร์เน็ต

8. การวัดและประเมินผล (K-P-A)

จุดประสงค์ / การวัดและประเมินผล	วิธีการวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
ความรู้ความเข้าใจ(K):นักเรียนสามารถเข้าใจความหมายของลำดับ หาพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิตได้	1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	1. แบบบันทึกการสังเกต 2. แบบฝึกหัด	นักเรียนทุกคนทำถูกต้องไม่ต่ำกว่าร้อยละ 70 ของคะแนนทั้งหมด
ด้านทักษะกระบวนการ(P): นักเรียนเกิดทักษะดังนี้ 1. มีการแก้ปัญหา 2. มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ 3. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะ(A):นักเรียนสามารถ 1. คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง 2. นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กะทัดรัด ชัดเจน และตรงประเด็น 3. ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป

เกณฑ์การวัดและประเมินผล

เกณฑ์การประเมินผลจากการทำกิจกรรม

ร้อยละ 80 ขึ้นไป หมายถึง ดีมาก

ร้อยละ 70-79 หมายถึง ดี

ร้อยละ 60-69 หมายถึง ปานกลาง

ร้อยละ 50-59 หมายถึง พอใช้

ต่ำกว่า ร้อยละ 50 หมายถึง ปรับปรุง

ผ่านการประเมินตั้งแต่ ร้อยละ ขึ้นไป

9. บุคลากรหลักเศรษฐกิจพอเพียง

1. ผู้สอนใช้หลักเศรษฐกิจพอเพียงในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ปศพ ประเด็น	พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
กิจกรรมการเรียนรู้	ก่อนการจัดกิจกรรมมีการวางแผนการเรียนรู้ชัดเจน เป็นลำดับขั้นตอน มีการกำหนดเนื้อหาสาระและกระบวนการเหมาะสมกับนักเรียน ชั้น ม.6	จัดการเรียนรู้ตรงมาตรฐาน ตัวชี้วัดของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 มาตรฐานตัวชี้วัด ค 1.1	มีการวางแผนการจัดกิจกรรมที่ชัดเจน เป็นขั้นตอน จากง่ายไปยาก จากรูปธรรมไปหานามธรรม
เวลา	กำหนดเนื้อหาสาระตามมาตรฐาน ตัวชี้วัด ค 5.3 เพื่อให้เหมาะสมกับเวลาเรียน 2 ชั่วโมง นักเรียนทำกิจกรรมตามแผนการจัดการเรียนรู้ได้ทันตามเวลา	กิจกรรมการเรียนรู้บรรลุ ตัวชี้วัดได้ตามเวลาที่กำหนด	มีการถามตอบ ทำให้นักเรียนเข้าใจและทำงานอย่างมีความสุข
สื่อ	จัดเตรียมและใช้สื่อในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ มีแบบฝึกหัดเพียงพอกับนักเรียน	นักเรียนได้เรียนรู้จากง่ายไปหายากและเรียนรู้อย่างมีความสุข	สื่อแบบฝึกหัดน่าสนใจและคุ้มค่า
แหล่งเรียนรู้	แหล่งเรียนรู้ที่ใช้เหมาะสมกับเนื้อหาสาระและกิจกรรม	นักเรียนใช้เป็นต้นแบบความคิดและปรับปรุงเป็นของตนเอง สะดวก ใช้งาน	-จัดห้องสื่อทันสมัย -สำรวจข้อมูลจากห้องสมุด -สำรวจข้อมูลจากอินเทอร์เน็ต
ความรู้ที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	-เทคนิควิธีการสอน รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ -ศึกษารูปแบบของแบบฝึก -วิเคราะห์และจัดทำเครื่องมือการวัดและประเมินผล -ศึกษา ค้นคว้าและนำหลักของปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียงมาบูรณาการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้		
คุณธรรม	-มีความรับผิดชอบในการปฏิบัติการสอน เข้าสอนตรงเวลา ปฏิบัติการสอนเต็มเวลา เต็มความสามารถ มีการเตรียมการสอน สื่อและแบบฝึกหัดไว้ล่วงหน้า -มีเมตตา ให้ความเสมอภาคและยุติธรรมกับนักเรียนทุกคน -มีความอดทน เสียสละ ใฝ่รู้ มีน้ำใจ		

คุณลักษณะ “อยู่อย่างพอเพียง”

พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
วางแผนในการทำงานรอบคอบเป็นระบบ และเตรียมอุปกรณ์การเรียนพร้อม	-มีความรู้ สามารถอธิบายการให้เหตุผลและสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาบางอย่างได้ - วิเคราะห์และเลือกวิธีที่สะดวกในการหาคำตอบ -มีความกระตือรือร้น สนใจเข้ากิจกรรม รู้จักการทำงานร่วมกับผู้อื่น	-ฝึกการทำงานโดยใช้ความคิดสร้างสรรค์ของตนเอง -สามารถใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และกระบวนการคิด -วิเคราะห์สาเหตุของการทำแบบฝึกหัดไม่ถูกต้องได้ด้วยตนเอง
ความรู้ (วิธีการ) - เรียนรู้จากแบบฝึกที่เป็นรูปธรรมไปหนามธรรม - เรียนรู้จากแบบฝึกง่ายไปหายาก - สามารถสรุปความคิดได้จากแบบฝึกหัด - ศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมได้จากแหล่งเรียนรู้ที่หลากหลาย ห้องสมุดกลุ่มสาระฯ ห้องสมุดโรงเรียน อินเทอร์เน็ต		
คุณธรรมที่เกิดกับนักเรียน - มีวินัย - ซื่อสัตย์สุจริต - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน - มีจิตสาธารณะ - มีความกระตือรือร้น		

3. ผลลัพธ์ KPA 4 มิติ ที่เกี่ยวข้องกับการอยู่อย่างพอเพียง

ผลลัพธ์	สมดุลและพร้อมต่อการเปลี่ยนแปลงในด้านต่าง ๆ			
	ด้านวัตถุ	ด้านสังคม	ด้านสิ่งแวดล้อม	ด้านวัฒนธรรม
ด้านความรู้	รู้จักกับการให้เหตุผล และสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา	มีความรู้ในการวางแผนการทำงาน		
ด้านทักษะ	สามารถอธิบาย การให้เหตุผล และนำไปใช้แก้ปัญหา	-สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้ -มีทักษะในการปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่นได้		
ด้านค่านิยม	เห็นคุณค่าของการให้เหตุผล	เห็นความสำคัญของการทำงานร่วมกับผู้อื่น		

10. บันทึกการจัดการเรียนรู้

ความคิดเห็นของผู้บริหาร

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ผู้อำนวยการ/รองผู้อำนวยการ/หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้

...../...../.....

บันทึกผลการสอน

1. ผลการสอน

.....

.....

.....

2. ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ

(นายสุเมธ จันทรมบัติ) ผู้สอน

...../...../.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ลำดับและอนุกรม

จำนวน 10 ชั่วโมง

เรื่อง อนุกรมอนันต์

จำนวน 23 ชั่วโมง

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

1. มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย ทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2. ตัวชี้วัด

ค 6.1 ม.6/1 ให้อธิบายที่ที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

ค 6.1 ม.6/2 ให้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/3 ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/4 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

ค 6.1 ม.6/5 เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และนำความรู้ หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ

ค 6.1 ม.6/6 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

3. สาระสำคัญ

ลิมิตของลำดับ

อนุกรมอนันต์

4. จุดประสงค์การเรียนรู้ (K-P-A)

ด้านความรู้ (K): นักเรียนสามารถ

1) หาสมบัติของลำดับอนันต์โดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตได้

2) แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิตได้

ด้านทักษะและกระบวนการ (P) : นักเรียนเกิดทักษะดังนี้

1) มีการแก้ปัญหา

2) มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

3) มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : นักเรียนสามารถ

- 1) คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง
- 2) นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กะทัดรัด ชัดเจน และตรงประเด็น
- 3) ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย

5. สารการเรียนรู้

ลิมิตของลำดับ

ลำดับที่มีลิมิต เท่ากับ L เขียนแทนด้วย $\lim a_n = L$ แสดงว่า เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด และพจน์ที่ n มีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับ จำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับอนันต์

เรียก ลำดับนี้ว่า ลำดับลู่เข้า (convergent sequence)

ถ้า a_n ลู่เข้าสู่จำนวนจริงจำนวนหนึ่ง เมื่อ n มีค่ามากขึ้น ($n \rightarrow \infty$)

เขียนแทนด้วย $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ เมื่อ L แทนจำนวนจริงใดๆ

ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับอนันต์

เรียกลำดับนี้ว่า ลำดับลู่ออก (divergent sequence)

ถ้า a_n ไม่ลู่เข้าสู่จำนวนจริงใด หรือมีค่ามากขึ้นหรือน้อยลงไม่มีขอบเขต

(1) ถ้า a_n ไม่ลู่เข้าสู่จำนวนจริงใด เมื่อ n มีค่ามากขึ้นแล้ว ลำดับอนันต์นี้ไม่มีลิมิต

(2) ถ้า a_n มีค่ามากขึ้นไม่มีขอบเขต เมื่อ $n \rightarrow \infty$ เขียนแทนด้วย $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

(3) ถ้า a_n มีค่าน้อยลงไม่มีขอบเขต เมื่อ $n \rightarrow \infty$ เขียนแทนด้วย $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

อนุกรมอนันต์

กำหนด $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ เป็นอนุกรมอนันต์

$$\text{ให้ } S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

เรียก S_n ว่า ผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรม เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

เรียกลำดับอนันต์ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ ว่า ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม (a sequence of partial sums)

กำหนดอนุกรมอนันต์ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ ให้ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ เป็นลำดับ

ผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ ถ้าลำดับ S_n เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim S_n = S$ เมื่อ S เป็นจำนวนจริง แล้ว

อนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (convergent series) เรียก S ว่า ผลบวกของอนุกรม

ถ้า ลำดับ S_n เป็นลำดับลู่ออก แล้วอนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ เป็นอนุกรมลู่ออก (divergent series) อนุกรมอนันต์ที่หาผลบวกได้ เรียกว่า อนุกรมลู่เข้า

อนุกรมอนันต์ที่หาผลบวกไม่ได้ เรียกว่า อนุกรมลู่ออก

บทนิยาม ผลบวกของอนุกรมอนันต์ใดๆ คือ ลิมิตของผลบวกย่อยตัวที่ n เมื่อ n เข้าสู่ค่าอนันต์ ใช้สัญลักษณ์

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

บทนิยาม ให้ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ เป็นอนุกรมอนันต์ใดๆ

- 1) อนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ เรียกว่า อนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ หาค่าได้
- 2) อนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ เรียกว่า อนุกรมลู่ออก ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ หาค่าไม่ได้

6. กิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

6.1 ครูให้นักเรียนพิจารณากราฟของลำดับ $a_n = \frac{1}{2^n}$, $a_n = 5$ และ $a_n = 1 - \frac{(1)^n}{n}$ ในหนังสือแบบเรียนหัวข้อที่ 1.1.5 แล้วร่วมกันอภิปรายลักษณะกราฟของแต่ละลำดับ

ขั้นสอน

6.2 จากกราฟ ครูให้นักเรียนสังเกตว่า เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด และพบว่า n มีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เขียนแทนด้วย $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

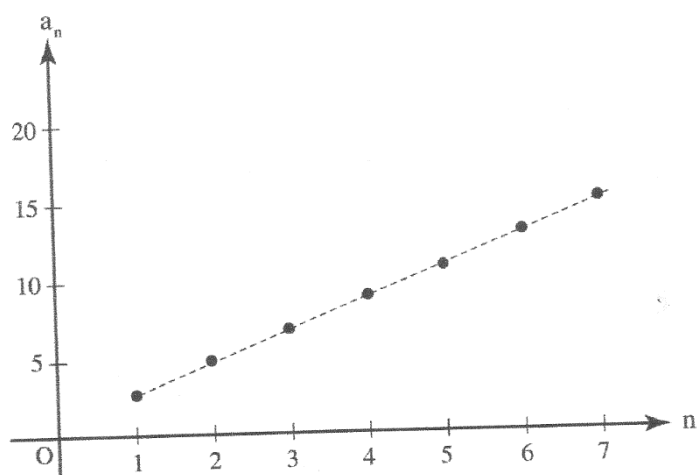
จากกราฟในขั้นนำ ครูให้นักเรียนบอกลิมิตของลำดับ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 5 &= 5 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{(-1)^n}{n} \right] &= 1 \end{aligned}$$

(ครูย้ำ สัญลักษณ์ $n \rightarrow \infty$ แทน n เข้าสู่ค่าอนันต์

6.3 ครูอธิบายว่า ลำดับอนันต์มีลิมิต เรียกว่า ลำดับลู่เข้า (convergent sequence) โดยเขียนบทนิยามต่อไปนี้บนกระดาน
 บทนิยาม ถ้า $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ เป็นลำดับอนันต์ เรียกลำดับนี้ว่า ลำดับลู่เข้า (convergent sequence) ถ้า a_n ลู่เข้าสู่จำนวนจริงจำนวนหนึ่ง เมื่อ n มีค่ามากขึ้น ($n \rightarrow \infty$) เขียนแทนด้วย $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ เมื่อ L แทนจำนวนจริงใดๆ

6.4 ครูให้นักเรียนพิจารณากราฟของลำดับ $a_n = 2n + 1$



จากกราฟ จะเห็นว่า เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับมีค่ามากขึ้นไม่เข้าใกล้จำนวนจริงใดจำนวนจริงหนึ่ง ลำดับนี้จึงไม่มีลิมิตและไม่เป็นลำดับลู่เข้า เรียกลำดับบ่อนันต์ นี้ว่า ลำดับลู่ออก(*divergent sequence*)

6.5 ครูเขียนบทนิยาม ต่อไปนี้บนกระดาน

บทนิยาม ถ้า $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ เป็นลำดับบ่อนันต์

เรียกลำดับนี้ว่า ลำดับลู่ออก (*divergent sequence*)

ถ้า a_n ไม่ลู่เข้าสู่จำนวนจริงใด หรือมีค่ามากขึ้นหรือน้อยลงไม่มีขอบเขต

1) ถ้า a_n ไม่ลู่เข้าสู่จำนวนจริงใด เมื่อ n มีค่ามากขึ้นแล้ว ลำดับบ่อนันต์นี้ ไม่มีลิมิต

2) ถ้า a_n มีค่ามากขึ้นไม่มีขอบเขต เมื่อ $n \rightarrow \infty$ เขียนแทนด้วย $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

3) ถ้า a_n มีค่าน้อยลงไม่มีขอบเขต เมื่อ $n \rightarrow \infty$ เขียนแทนด้วย $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

6.6 จากบทนิยาม ครูให้ข้อสังเกตเพิ่มเติมในประเด็นต่อไปนี้

1. ลำดับลู่เข้า คือ ลำดับที่มีลิมิต

2. ลำดับลู่ออก คือ ลำดับที่ไม่มีลิมิต แบ่งออกเป็น 3 ประเภท ดังนี้

(1) ลำดับลู่ออก ซึ่งมี a_n มีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด

เช่น $1, 3, 9, 27, \dots, 3^{n-1}, \dots$

(2) ลำดับลู่ออก ซึ่งมี a_n มีค่าลดลงเรื่อย ๆ เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด เช่น

$-1, -3, -5, \dots, -(2n-1), \dots$

(3) ลำดับลู่ออก ซึ่งมีลักษณะแตกต่างจาก ข้อ (1) และ (2) เรียกว่า ลำดับแกว่งกวัด

(*oscillating sequence*) เช่น $a_n = (-1)^{n-1}$ หรือ $a_n = n(-1)^n$

(นักเรียนดูรูปกราฟของลำดับแกว่งกวัด $a_n = (-1)^{n-1}$ ได้จากในหนังสือแบบเรียน)

6.7 ครูให้แนวคิดว่าการที่เราจะทราบว่ลำดับบ่อนันต์แต่ละลำดับมีลิมิตหรือไม่ลิมิต จำเป็นต้องหาลิมิตของลำดับแต่ละลำดับก่อนทุกครั้ง เราสามารถหาลิมิตของลำดับได้รวดเร็วและถูกต้อง โดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต โดยครูให้นักเรียนศึกษาทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตตามรายละเอียดในหนังสือเรียน

6.8 ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 ในหนังสือแบบเรียน โดยอธิบายหลักในการหาลิมิต กรณีที่ $n \rightarrow \infty$ ดังนี้

ขั้นที่ 1 นำตัวแปรที่มีกำลังสูงสุดที่มีอยู่ในพจน์ที่ n หารทั้งตัวเศษและตัวส่วน

ขั้นที่ 2 แยกตัวเศษและตัวส่วนเป็นพจน์ย่อย ๆ แต่ละพจน์

ขั้นที่ 3 ใช้ทฤษฎีบทต่างๆ เกี่ยวกับลิมิต ในการหาลิมิต

โดยย้ำในประเด็นที่ว่า ในการหาลิมิตของลำดับโดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตจะต้องเขียนพจน์ที่ n ของลำดับให้อยู่ในรูปที่จะใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตได้ เพราะว่าบางลำดับที่มีลิมิต ถ้าไม่เปลี่ยนรูปพจน์ที่ n ก่อน จะทำให้หาลิมิตไม่ได้ เช่น

$$a_n = \frac{2n^2-3n}{3n^2+n}$$

เปลี่ยนรูปพจน์ที่ n โดยหารทั้งตัวเศษและตัวส่วนของพจน์ที่ n ด้วย n^2

$$a_n = \frac{\frac{2n^2-3n}{n^2}}{\frac{3n^2+n}{n^2}} = \frac{2-\frac{3}{n}}{3+\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{3}{n}}{3+\frac{1}{n}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} \\
 &= \frac{2-0}{3+0} \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

สำหรับ ลำดับที่ไม่มีลิมิต ถึงแม้จะเปลี่ยนรูปพจน์ที่ n ของลำดับให้อยู่ในรูป ซึ่งหาลิมิตแต่ละพจน์ย่อยได้ ก็ไม่สามารถหาลิมิตของลำดับนั้นได้ เช่น

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1-n^2}{1-n} \\
 a_n &= \frac{\frac{1-n^2}{n^2}}{\frac{1-n}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2}-1}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}}
 \end{aligned}$$

ซึ่งจะหาลิมิตโดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตไม่ได้ เพราะลิมิตของตัวส่วนเป็นศูนย์

ข้อสังเกต ในการหาลิมิตของลำดับ a_n สรุปได้ดังนี้

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ถ้า $a > 1$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ถ้า $a = 1$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ถ้า $-1 < a < 1$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ไม่มีลิมิต ถ้า $a \leq -1$

6.9 ครุณาเสนอตัวอย่างต่อไปนี้เพิ่มเติมจากในหนังสือเรียน

1) กำหนดให้ $a_n = \frac{2n}{n+1}$ และ $b_n = \frac{n+1}{2n}$ จงหาลิมิตของ $a_n, b_n, a_n b_n$ และ $\frac{a_n}{b_n}$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+1} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1+\frac{1}{n}} \right) \\
 &= \frac{2}{1+0} \\
 &= 2 \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2} \right) \\
 &= \frac{1+0}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\
 &= (2) \left(\frac{1}{2} \right) \\
 &= 1 \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\frac{1}{2}} \\
 &= 4 \\
 2) \text{ จงหาขีดจำกัดของลำดับ ซึ่งมีพจน์ที่ } n \text{ เท่ากับ } & \frac{(2n-1)(3n-2)(4n-3)}{8n^3+n-6} \\
 \text{วิธีทำ} \quad a_n &= \frac{(2n-1)(3n-2)(4n-3)}{8n^3+n-6} \\
 &= \frac{\left(\frac{2n-1}{n}\right)\left(\frac{3n-2}{n}\right)\left(\frac{4n-3}{n}\right)}{\frac{8n^3+n-6}{n^3}} \\
 &= \frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{2}{n}\right)\left(4-\frac{3}{n}\right)}{8+\frac{1}{n^2}-6} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2-\frac{1}{n}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3-\frac{2}{n}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4-\frac{3}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 8 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n^3}} \\
 &= \frac{(2-0)(3-0)(4-0)}{8+0-0} \\
 &= \frac{24}{8} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \text{ จงหาขีดจำกัดของลำดับ ซึ่งมีพจน์ที่ } n \text{ เท่ากับ } & \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \\
 \text{วิธีทำ} \quad a_n &= \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \\
 &= \frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1})}{(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1})} \\
 &= \frac{n^2+n-n^2-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} \\
 &= \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} \\
 &= \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \frac{1-0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} \\
 &= \frac{1}{1+1} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

6.10 ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม ทำกิจกรรมที่ 1.1 ข กลุ่มละ 3 ข้อ โดยวิธีจับฉลาก ภายในเวลาที่กำหนด แล้วนำคำตอบมาอภิปรายร่วมกัน

ขั้นสรุป

6.11 ครูและนักเรียน ร่วมกันสรุปตามประเด็นต่อไปนี้

1) ลำดับอนันต์ที่มีขีดจำกัด เรียกว่า ลำดับลู่เข้า

ลำดับอนันต์ที่ไม่มีขีดจำกัด เรียกว่า ลำดับลู่ออก

2) การพิจารณาว่าลำดับใดลู่เข้า ลำดับใดลู่ออกทำได้โดย

- พิจารณาจากกราฟของลำดับ
- ใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับขีดจำกัด

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นนำ

6.12 ครูทบทวนการหาขีดจำกัดของลำดับอนันต์และให้แนวคิดในการหาค่าขีดจำกัดโดยวิธีลัด ดังนี้

ขั้นที่ 1 ทำตัวเศษ และตัวส่วนในพจน์ที่ n ให้มีตัวแปรกำลังสูงสุดเท่ากัน

ขั้นที่ 2 หาค่าขีดจำกัดโดยนำสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีกำลังสูงสุดของตัวเศษหารด้วยสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีกำลังสูงสุดของ

ตัวส่วน

$$\text{จะได้ ค่าขีดจำกัด} = \frac{\text{สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีกำลังสูงสุดของตัวเศษ}}{\text{สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีกำลังสูงสุดของตัวส่วน}}$$

เช่น 1) $a_n = \frac{3n^2+2n}{4n^2-1}$
 จะได้ว่า พจน์ของตัวเศษที่มีกำลังสูงสุด คือ $3n^2$
 พจน์ของตัวส่วนที่มีกำลังสูงสุด คือ $4n^2$

ดังนั้น $\lim a_n = \lim \frac{3n^2+2n}{4n^2-1} = \frac{3}{4}$

2) $a_n = \frac{2n+5}{2n^2-3n}$
 เนื่องจาก $\frac{2n+5}{2n^2-3n} = \frac{0n^2+2n+5}{2n^2-3n}$
 จะได้ว่า พจน์ของตัวเศษที่มีกำลังสูงสุด คือ $0n^2$
 พจน์ของตัวส่วนที่มีกำลังสูงสุด คือ $2n^2$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{2n^2-3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0n^2+2n+5}{2n^2-3n} = \frac{0}{2} = 0$

3) $a_n = \frac{n^2-4n}{n+3}$
 เนื่องจาก $\frac{n^2-4n}{n+3} = \frac{n^2-4n}{0n^2+n+3}$
 จะได้ว่า พจน์ของตัวเศษที่มีกำลังสูงสุด คือ n^2
 พจน์ของตัวส่วนที่มีกำลังสูงสุด คือ $0n^2$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-4n}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-4n}{0n^2+n+3} = \frac{1}{0}$ หาค่าไม่ได้

ขั้นสอน

1. ครูนำเสนอ ตัวอย่างการหาขีดจำกัดของลำดับ โดยวิธีลัดเพิ่มเติม กรณีที่ลำดับ a_n อยู่ในรูปกรณฑ์ที่สอง

1) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n+2}+4}{n-1}$
 เนื่องจาก $\sqrt[3]{n+2} = (n+2)^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{\sqrt[3]{n+2}+4}{n-1} = \frac{0n+(n+2)^{\frac{1}{3}}+4}{n-1}$$

 กำลังสูงสุดของตัวเศษและตัวส่วน คือ กำลัง 1

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}+4}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0n+(n+2)^{\frac{1}{3}}+4}{n-1} = \frac{0}{1} = 0$

$$2) a_n = \frac{\sqrt{5n^2-2}}{n+3}$$

$$\text{เนื่องจาก } \sqrt{5n^2-2} = (5n^2-2)^{\frac{1}{2}}$$

กำลังสูงสุดของตัวเศษ คือ กำลังของ $(n^2)^{\frac{1}{2}}$ หรือ กำลัง 1

สัมประสิทธิ์ของพจน์กำลังสูงสุดของตัวเศษ คือ $(5)^{\frac{1}{2}}$ หรือ $\sqrt{5}$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n^2-2}}{n+3} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$$

2. ครูอธิบายเรื่องอนุกรม โดยเขียนบทนิยามต่อไปนี้บนกระดาน

บทนิยาม 1. เมื่อ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับจำกัด เรียกผลบวกของทุกพจน์ของลำดับในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ว่า อนุกรมจำกัด

2. เมื่อ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับอนันต์ เรียกผลบวกของทุกพจน์ของลำดับ ในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ ว่า อนุกรมอนันต์

เช่น $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16$ เป็นลำดับจำกัดที่ได้จากลำดับจำกัด

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$$

$2 + 4 + 6 + \dots + 2n + \dots$ เป็นลำดับอนันต์ที่ได้จากลำดับอนันต์ $2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$

3. ครูอธิบายสูตรที่ใช้หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม ดังนี้

1) ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \quad \text{หรือ} \quad S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

2) ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}, \quad r \neq 1 \quad \text{เหมาะสำหรับ } |r| > 1 \quad \text{หรือ}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, \quad r \neq 1 \quad \text{เหมาะสำหรับ } |r| < 1$$

ที่มาของสูตรข้างต้นให้นักเรียนศึกษาด้วยตนเอง

จากนั้น ให้นักเรียนอ่านบทนิยามในหนังสือเรียนต่อไป

บทนิยาม กำหนด $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นอนุกรมอนันต์

$$\text{ให้ } S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$\vdots$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

เรียก S_n ว่า ผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรม เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

เรียก ลำดับอนันต์ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ ว่า ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม (a sequence of partial sums)

4. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 ในหนังสือแบบเรียน โดยให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ก่อนแสดงวิธีทำ

ตัวอย่างที่ 1 1) อนุกรม $4 + 7 + 10 + \dots + (3n+1) + \dots$ เป็นอนุกรมชนิดใด

(อนุกรมเลขคณิต เนื่องจาก $4 + 7 + 10 + \dots + (3n+1) + \dots$ เป็นอนุกรมที่ได้จาก

ลำดับเลขคณิต $4, 7, 10, \dots, (3n+1) + \dots$)

- 2) ให้นักเรียนบอกค่า a_1 และ d
 ($a_1 = 4$, $d = 7 - 4 = 10 - 7 = \dots = 3$)

- 3) ใช้สูตรใดมาช่วยในการคำนวณหาลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม

$$(\text{ใช้สูตร } S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d])$$

ตัวอย่างที่ 2

- 1) อนุกรม $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ เป็นอนุกรมชนิดใด

(เป็นอนุกรมเรขาคณิต เนื่องจาก $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ เป็นอนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$)

- 2) ให้นักเรียนบอกค่า a_1 และ r

$$(a_1 = \frac{1}{2} \\ r = \frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \div \frac{1}{4} = \dots = \frac{1}{2})$$

- 3) ใช้สูตรใดมาช่วยในการหาลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม

$$(\text{ใช้สูตร } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r})$$

$$\text{เนื่องจาก } |r| = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \text{ น้อยกว่า } 1)$$

5. ให้นักเรียนอ่านบทนิยามในหนังสือเรียนต่อไปนี้

บทนิยาม กำหนดอนุกรมอนันต์ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ ให้ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ เป็นลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ ถ้าลำดับ S_n เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ เป็นจำนวนจริง แล้วอนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (convergent series) เรียก S ว่า ผลบวกของอนุกรม

ถ้า ลำดับ S_n เป็นลำดับลู่ออก แล้ว อนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ เป็นอนุกรมลู่ออก (divergent series)

จากบทนิยาม ครูอธิบายเสริมว่า อนุกรมจำกัดทุกอนุกรมหาผลบวกได้เสมอ แต่สำหรับอนุกรมอนันต์จะมีทั้งอนุกรมที่หาผลบวกได้และอนุกรมที่หาผลบวกไม่ได้

อนุกรมอนันต์ที่หาผลบวกได้ เรียกว่า อนุกรมลู่เข้า

อนุกรมอนันต์ที่หาผลบวกไม่ได้ เรียกว่า อนุกรมลู่ออก

ครูเขียนบทนิยามต่อไปนี้ เพิ่มเติมบนกระดาน

บทนิยาม ผลบวกของอนุกรมอนันต์ใด คือลิมิตของผลบวกย่อยตัวที่ n เมื่อ n เข้าสู่ออนันต์ ใช้สัญลักษณ์

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

บทนิยาม ให้ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ เป็นอนุกรมอนันต์ใดๆ

- 1) อนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ เรียกว่า อนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ หาค่าได้

- 2) อนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ เรียกว่า อนุกรมลู่ออก ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ หาค่าไม่ได้

6. ครูยกตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า อนุกรม $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ถ้าลู่เข้า จงหาผลบวกของอนุกรม

จากตัวอย่าง ครูให้หลักในการตรวจสอบว่า อนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ดังนี้

ขั้นที่ 1 หา S_n

ขั้นที่ 2 หา $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

ขั้นที่ 3 ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ หาค่าได้ แสดงว่า อนุกรมอนันต์ลู่เข้า

ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ หาค่าไม่ได้ แสดงว่า อนุกรมอนันต์ลู่ออก

แสดงวิธีทำดังนี้

วิธีทำ ขั้นที่ 1 อนุกรมที่กำหนดให้ได้จากลำดับเรขาคณิต $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$ มี $a_1 = \frac{1}{3}$ และ $r = \frac{1}{3}$

หาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมได้ดังนี้

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \\ &= \frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) \end{aligned}$$

ขั้นที่ 2 หา $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ขั้นที่ 3 เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ หาค่าได้

ดังนั้น อนุกรมอนันต์ที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่เข้า และมีผลบวก เท่ากับ $\frac{1}{2}$

* ครูให้คำแนะนำเพิ่มเติมว่า เรามีวิธีตรวจสอบว่า อนุกรมเรขาคณิตลู่เข้าหรือลู่ออก โดยวิธีลัดจากทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ให้อนุกรมเรขาคณิตมีพจน์แรกเป็น a_1 และ r เป็นอัตราส่วนร่วม

ถ้า $|r| < 1$ แล้ว อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และมี $\frac{a_1}{1-r}$ เป็นผลบวกของอนุกรม

ถ้า $|r| \geq 1$ แล้ว อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

จากตัวอย่างข้างต้น $|r| = \left|\frac{1}{3}\right| < 1$ ดังนั้น อนุกรมลู่เข้า

$$\text{ผลบวกของอนุกรม} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

7. ครูยกตัวอย่างโจทย์ต่อไปนี้ ให้นักเรียนช่วยกันหาคำตอบ

1) ในการตรวจเสาทองหนึ่งซึ่งวางเรียงกันเป็นขั้นๆ พบว่าเสาในแต่ละชั้นจะมีมากกว่าเสาในชั้นบนที่อยู่ติดกันเป็น

จำนวน 3 ต้นเสมอ ถ้าชั้นบนสุดมีเสา 61 ต้น และชั้นล่างสุด ซึ่งอยู่ติดกับพื้นดินมีเสา 379 ต้น จงหาว่าเสา

ทองนี้วางซ้อนกันกี่ชั้น และมีเสาทั้งหมดกี่ต้น

วิธีทำ จำนวนเสาเรียงกันจากชั้นบนสุด คือ $61, 64, 67, \dots, 379$

อนุกรม คือ $61, 64, 67, \dots, 379$ เป็นอนุกรมเลขคณิต

หาจำนวนชั้น

$$\text{จากสูตร } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 379, \quad a_1 = 61, \quad d = 3$$

$$379 = 61 + (n - 1)3$$

$$379 = 61 + 3n - 3$$

$$3n = 321$$

$$n = 107$$

ดังนั้น เสากอนี้มี 107 ชั้น

หาจำนวนเสาทั้งหมด

$$\begin{aligned} \text{จาก สูตร } S_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \\ &= \frac{107}{2}(61 + 379) \\ &= \frac{107}{2} \times 440 \\ &= 23,540 \end{aligned}$$

ดังนั้น เสากอนี้มีทั้งหมด 23,540 ต้น

2) เด็กคนหนึ่งเรียงลูกหินเป็นแถวๆ เพื่อประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยม โดยจัดลูกหินในแถวบนให้น้อยกว่าลูกหินในแถว

ล่างที่อยู่ติดกันหนึ่งลูก ถ้าแถวบนสุดมีลูกหินอยู่เพียงหนึ่งลูก ซึ่งอยู่ในตำแหน่งของจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมด้วย ถ้ารูปสามเหลี่ยมนี้ประกอบด้วยลูกหินทั้งหมด 190 ลูก จงหาว่าฐานของรูปสามเหลี่ยมมีลูกหินกี่ลูก

วิธีทำ ลูกหินที่เรียงจากแถวบนสุดเขียนเป็นอนุกรมได้ ดังนี้

$$1 + 2 + 3 + \dots \text{ ซึ่งเป็นอนุกรมเลขคณิต}$$

หา n

$$\begin{aligned} \text{จากสูตร } S_n &= \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d] \\ S_n = 190, \quad a_1 = 1, \quad d = 1 \\ 190 &= \frac{n}{2}[2(1) + (n - 1)(1)] \\ 380 &= n(2 + n - 1) \\ 380 &= n(n + 1) \\ 19 \times 20 &= n(n + 1) \\ 19 \times (19 + 1) &= n(n + 1) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } n = 19$$

แถวล่างสุด คือ แถวที่ 19

หาจำนวนลูกหินในแถวที่ 19

$$\begin{aligned} \text{จากสูตร } a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ &= 1 + (19 - 1)(1) \\ &= 1 + 18 \\ &= 19 \end{aligned}$$

ดังนั้น ฐานของรูปสามเหลี่ยมมีลูกหิน 19 ลูก

3) ลูกตุ้มนาฬิกาเรือนหนึ่งแกว่งเป็นเส้นโค้ง ครั้งแรกแกว่งได้ทาง 10 เซนติเมตร ครั้งต่อไปแกว่งได้ระยะทาง $\frac{9}{10}$ ของระยะทางครั้งก่อนเสมอ จงหาระยะทางที่ลูกตุ้มของนาฬิกาเรือนนี้แกว่งตั้งแต่เริ่มแกว่งจนหยุด

วิธีทำ ครั้งแรกลูกตุ้มแกว่งได้ทาง 10 เซนติเมตร

$$\text{ครั้งที่สองลูกตุ้มแกว่งได้ทาง } \frac{9}{10} \times 10 = 9 \text{ เซนติเมตร}$$

ครั้งที่สามลูกตุ้มแกว่งได้ทาง $\frac{9}{10} \times 9 = 8.1$ เซนติเมตร

อนุกรม คือ $10 + 9 + 8.1 + \dots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

$$a_1 = 10, r = \frac{9}{10} = 0.9$$

$$\begin{aligned} \text{จากสูตร} \quad S_\infty &= \frac{a_1}{1-r} \\ &= \frac{10}{1-0.9} = \frac{10}{0.1} \\ &= 100 \end{aligned}$$

ดังนั้น ลูกตุ้มแกว่งได้ทางทั้งสิ้น 100 เซนติเมตร

8. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มทำกิจกรรมที่ 1.2 ก กลุ่มละ 3 ชื่อ แล้วร่วมกันอภิปรายคำตอบที่ได้ของแต่ละกลุ่ม
ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปตามประเด็นต่อไปนี้

1) อนุกรมได้จากการบวกพจน์ทุกพจน์ของลำดับ

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต คือ

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] && \text{เมื่อทราบพจน์แรก และผลต่างร่วม} \\ \text{หรือ } S_n &= \frac{n}{2} (a_1 + a_n) && \text{เมื่อทราบพจน์แรก และพจน์ที่ } n \end{aligned}$$

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}, r \neq 1 && \text{เหมาะสำหรับ } |r| > 1 \quad \text{หรือ} \\ S_n &= \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1 && \text{เหมาะสำหรับ } |r| < 1 \end{aligned}$$

2) อนุกรมอนันต์ใดๆ เรียกว่า อนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ หาค่าได้

อนุกรมอนันต์ใดๆ เรียกว่า อนุกรมลู่ออก ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ หาค่าไม่ได้

3) การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ คือ การหาค่า S โดยที่ $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นนำ

ครูทบทวน การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ โดยกำหนดโจทย์ต่อไปนี้ ให้นักเรียนหาคำตอบ

1) จงหาผลบวกของ $2 + \frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \frac{35}{316} + \dots$

วิธีทำ $2 + \frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \frac{35}{316} + \dots$

$$\begin{aligned} &= 2 + \frac{5}{2 \times 3} + \frac{13}{4 \times 9} + \frac{35}{8 \times 27} + \dots \\ &= 2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots \right) \\ &= 2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots \right) \\ &= 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} \\ &= 2 + 1 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2) จงหาผลบวกของ $\frac{1}{6} + \frac{7}{36} + \frac{37}{216} + \dots$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2 \times 3} + \frac{7}{4 \times 9} + \frac{37}{8 \times 27} + \dots \\
 &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{7}{9} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{8}{27} - \frac{1}{8} \right) + \dots \\
 &= \left(\frac{2}{3} + \frac{7}{9} + \frac{8}{27} + \dots \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) \\
 &= \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= 2 - 1 = 1
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้ คือ 1

ขั้นสอน

1. ครูอธิบายว่า ในการเขียนอนุกรมบางอนุกรมค่อนข้างยืดยาว ดังนั้น เพื่อความสะดวกในการเขียนอนุกรม จะใช้สัญลักษณ์ Σ (เรียกว่า ซิกมา) แทนการบวกของพจน์ต่างๆ ดังนี้

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

2. จากสัญลักษณ์ $\sum_{i=1}^n a_i$ หรือ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ตัวแปร เรียกว่า ดัชนี ซึ่งจะกำหนดพจน์แรกและพจน์สุดท้ายของอนุกรม เช่น

$$\sum_{i=1}^6 i \text{ แทน } 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

$$\sum_{i=1}^5 i^2 \text{ แทน } 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} 3^n \text{ แทน } 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n + \dots$$

ครูให้ข้อสังเกตว่า ตัวอักษรที่เป็นดัชนีจะใช้ตัวอักษรตัวใดก็ได้ ไม่จำเป็นต้องใช้ตัวอักษร i อย่างเดียว เช่น

$$\sum_{i=1}^{\infty} i + 1 \text{ อาจเขียนเป็น } \sum_{n=1}^{\infty} n + 1 \text{ หรือ } \sum_{r=1}^{\infty} r + 1$$

นอกจากนี้ ดัชนีก็ไม่จำเป็นต้องเริ่มจาก 1 เสมอไป เช่น

$$\sum_{k=10}^{14} k^2 = 10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2$$

$$\sum_{n=40}^{42} n + 5 = (40 + 5) + (41 + 5) + (42 + 5)$$

3. ครูให้นักเรียนศึกษา สมบัติของ Σ ในหนังสือแบบเรียน และสรุปสูตรเกี่ยวกับผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมที่มักจะใช้เสมอ ดังนี้

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n}{2}(n + 1)$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n}{2}(n + 1) \right]^2 = [\sum_{i=1}^n i]^2$$

4. ครุยยกตัวอย่างต่อไปนี้เพิ่มเติมจากในหนังสือแบบเรียน

1) จงหาค่าของ $\sum_{i=1}^n (4i^3 - 6i^2 + 2i - 5)$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \sum_{i=1}^n (4i^3 - 6i^2 + 2i - 5) &= 4 \sum_{i=1}^n i^3 - 6 \sum_{i=1}^n i^2 + 2 \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 5 \\
 &= 4 \Sigma n^3 - 6 \Sigma n^2 + 2 \Sigma n - 5n \\
 &= 4 \left[\frac{n}{2} (n+1) \right]^2 - 6 \left[\frac{n}{6} (n+1)(2n+1) \right] + 2 \left[\frac{n}{2} (n+1) \right] - 5n \\
 &= 4 \left[\frac{n^2}{4} (n+1)(n+1) \right] - n(n+1)(2n+1) + n(n+1) - 5n \\
 &= n^2(n+1)(n+1) - n(n+1)(2n+1) + n(n+1) - 5n \\
 &= (n+1)[n^2(n+1) - n(2n+1) + n] - 5n \\
 &= (n+1)(n^3 + n^2 - 2n^2 - n + n) - 5n \\
 &= (n+1)(n^3 - n^2) - 5n \\
 &= n^2(n+1)(n-1) - 5n \\
 &= n^2(n^2 - 1) - 5n \\
 &= n^4 - n^2 - 5n \\
 &= n(n^3 - n - 5)
 \end{aligned}$$

2) จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้ถึง n พจน์ $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 + \dots$

$$\text{วิธีทำ} \quad 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 + \dots$$

พิจารณาลำดับ $1, 2, 3, 4, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต

มีพจน์ที่ n ของลำดับ $a_n = 1 + (n-1)1 = n$

พิจารณาลำดับ $3, 5, 7, 9, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต

มีพจน์ที่ n ของลำดับ $a_n = 3 + (n-1)2 = 2n + 1$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับ $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 + \dots$ คือ

$$\begin{aligned}
 a_n &= n(2n + 1) \\
 a_n &= 2n^2 + n \\
 \Sigma a_n &= 2 \Sigma n^2 + \Sigma n \\
 &= 2 \cdot \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) + \frac{n}{2} (n+1) \\
 &= (n+1) \left[\frac{n}{3} (2n+1) + \frac{n}{2} \right] \\
 &= (n+1) \left(\frac{2}{3} n^2 + \frac{n}{3} + \frac{n}{2} \right) \\
 &= (n+1) \left(\frac{2}{3} n^2 + \frac{5}{6} n \right) \\
 &= (n+1) \left(\frac{4}{6} n^2 + \frac{5}{6} n \right) \\
 &= \frac{n}{6} (n+1)(4n+5)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก n พจน์ของอนุกรม $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 + \dots$ เท่ากับ $\frac{n}{6} (n+1)(4n+5)$

ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มทำกิจกรรมที่ 1.2 ข กลุ่มละ 3 ชื่อ ภายในเวลาที่กำหนด สำหรับโจทย์ข้อที่ยาก ครูควรให้คำแนะนำเบื้องต้นในการแก้ปัญหา(ศึกษาได้จากส่วนเฉลย) เมื่อทุกกลุ่มทำเสร็จแล้ว นำคำตอบมาอภิปรายร่วมกัน

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันทบทวนสมบัติของ Σ และการใช้ Σ หาผลบวก

7. สื่อ / แหล่งการเรียนรู้

7.1 ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

7.2 ห้องสมุดโรงเรียน

7.3 อินเทอร์เน็ต

8. การวัดและประเมินผล (K-P-A)

การวัดและประเมินผล จุดประสงค์	วิธีการวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
ความรู้ความเข้าใจ(K):นักเรียนสามารถ หาสมบัติของลำดับอนันต์โดยอาศัย ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตได้ แก้ปัญหาเกี่ยวกับอนุกรมเลขคณิต และอนุกรมเรขาคณิตได้	1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	1. แบบบันทึกการสังเกต 2. แบบฝึกหัด	นักเรียนทุกคนทำถูกต้องไม่ ต่ำกว่าร้อยละ 70 ของ คะแนนทั้งหมด
ด้านทักษะกระบวนการ(P): นักเรียน เกิดทักษะดังนี้ 1. มีการแก้ปัญหา 2. มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทาง คณิตศาสตร์และการนำเสนอ 3. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	1. สังเกตการทำกิจกรรมใน ชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การ ประเมินในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะ(A):นักเรียนสามารถ 1. คิดอย่างหลากหลาย มีความคิด ตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นใน ตนเอง 2. นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กะทัดรัด ชัดเจน และตรงประเด็น 3. ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความ เชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย	1. สังเกตการทำกิจกรรมใน ชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การ ประเมินในระดับดีขึ้นไป

เกณฑ์การวัดและประเมินผล

เกณฑ์การประเมินผลจากการทำกิจกรรม

ร้อยละ 80 ขึ้นไป หมายถึง ดีมาก

ร้อยละ 70-79 หมายถึง ดี

ร้อยละ 60-69 หมายถึง ปานกลาง

ร้อยละ 50-59 หมายถึง พอใช้

ต่ำกว่า ร้อยละ 50 หมายถึง ปรับปรุง

ผ่านการประเมินตั้งแต่ ร้อยละ ขึ้นไป

9. บูรณาการหลักเศรษฐกิจพอเพียง

1. ผู้สอนใช้หลักเศรษฐกิจพอเพียงในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ประเด็น \ ปศพ	พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
กิจกรรมการเรียนรู้	ก่อนการจัดกิจกรรมมีการวางแผนการเรียนรู้ชัดเจนเป็นลำดับขั้นตอน มีการกำหนดเนื้อหาสาระและกระบวนการเหมาะสมกับนักเรียน ชั้น ม.6	จัดการเรียนรู้ตรงมาตรฐานตัวชี้วัดของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 มาตรฐานตัวชี้วัด ค 1.1	มีการวางแผนการจัดกิจกรรมที่ชัดเจน เป็นขั้นตอน จากง่ายไปยาก จากรูปธรรมไปหานามธรรม
เวลา	กำหนดเนื้อหาสาระตามมาตรฐาน ตัวชี้วัด ค 5.3 เพื่อให้เหมาะสมกับเวลาเรียน 2 ชั่วโมง นักเรียนทำกิจกรรมตามแผนการจัดการเรียนรู้ได้ทันตามเวลา	กิจกรรมการเรียนรู้บรรลุตัวชี้วัดได้ตามเวลาที่กำหนด	มีการถามตอบ ทำให้นักเรียนเข้าใจและทำงานอย่างมีความสุข
สื่อ	จัดเตรียมและใช้สื่อในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ มีแบบฝึกหัดเพียงพอกับนักเรียน	นักเรียนได้เรียนรู้จากง่ายไปหายากและเรียนรู้ด้วยความสุข	สื่อแบบฝึกหัดน่าสนใจและคุ้มค่า
แหล่งเรียนรู้	แหล่งเรียนรู้ที่ใช้เหมาะสมกับเนื้อหาสาระและกิจกรรม	นักเรียนใช้เป็นต้นแบบความคิดและปรับปรุงเป็นของตนเอง สะดวก ใช้งาน	-จัดห้องสื่อทันสมัย -สำรวจข้อมูลจากห้องสมุด -สำรวจข้อมูลจากอินเทอร์เน็ต
ความรู้ที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	-เทคนิควิธีการสอน รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ -ศึกษารูปแบบของแบบฝึก -วิเคราะห์และจัดทำเครื่องมือการวัดและประเมินผล -ศึกษา ค้นคว้าและนำหลักของปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียงมาบูรณาการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้		
คุณธรรม	-มีความรับผิดชอบในการปฏิบัติการสอน เข้าสอนตรงเวลา ปฏิบัติการสอนเต็มเวลา เต็มความสามารถ มีการเตรียมการสอน สื่อและแบบฝึกหัดไว้ล่วงหน้า -มีเมตตา ให้ความเสมอภาคและยุติธรรมกับนักเรียนทุกคน -มีความอดทน เสียสละ ใฝ่รู้ มีน้ำใจ		

คุณลักษณะ “อยู่อย่างพอเพียง”

พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
วางแผนในการทำงานรอบคอบเป็นระบบ และเตรียมอุปกรณ์การเรียนพร้อม	-มีความรู้ สามารถอธิบายการให้เหตุผลและสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาบางอย่างได้ - วิเคราะห์และเลือกวิธีที่สะดวกในการหาคำตอบ -มีความกระตือรือร้น สนใจเข้ากิจกรรม รู้จักการทำงานร่วมกับผู้อื่น	-ฝึกการทำงานโดยใช้ความคิดสร้างสรรค์ของตนเอง -สามารถใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และกระบวนการคิด -วิเคราะห์สาเหตุของการทำแบบฝึกหัดไม่ถูกต้องได้ด้วยตนเอง
ความรู้ (วิธีการ) - เรียนรู้จากแบบฝึกที่เป็นรูปธรรมไปหนามธรรม - เรียนรู้จากแบบฝึกง่ายไปหายาก - สามารถสรุปความคิดได้จากแบบฝึกหัด - ศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมได้จากแหล่งเรียนรู้ที่หลากหลาย ห้องสมุดกลุ่มสาระฯ ห้องสมุดโรงเรียน อินเทอร์เน็ต		
คุณธรรมที่เกิดกับนักเรียน - มีวินัย - ซื่อสัตย์สุจริต - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน - มีจิตสาธารณะ - มีความกระตือรือร้น		

3. ผลลัพธ์ KPA 4 มิติ ที่เกี่ยวข้องกับการอยู่อย่างพอเพียง

ผลลัพธ์	สมดุลและพร้อมต่อการเปลี่ยนแปลงในด้านต่าง ๆ			
	ด้านวัตถุ	ด้านสังคม	ด้านสิ่งแวดล้อม	ด้านวัฒนธรรม
ด้านความรู้	รู้จักกับการให้เหตุผล และสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา	มีความรู้ในการวางแผนการทำงาน		
ด้านทักษะ	สามารถอธิบาย การให้เหตุผล และนำไปใช้แก้ปัญหา	-สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้ -มีทักษะในการปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่นได้		
ด้านค่านิยม	เห็นคุณค่าของการให้เหตุผล	เห็นความสำคัญของการทำงานร่วมกับผู้อื่น		

10. บันทึกการจัดการเรียนรู้

ความคิดเห็นของผู้บริหาร

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ผู้อำนวยการ/รองผู้อำนวยการ/หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้

...../...../.....

บันทึกผลการสอน

1. ผลการสอน

.....

.....

.....

2. ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ

(นางสาวนิภาพร นาอ่อน) ผู้สอน

...../...../.....



หน่วยเรียนรู้ที่ 2

ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5

ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เวลา 58 ชั่วโมง



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น

จำนวน 58 ชั่วโมง

เรื่อง ลิมิต

จำนวน 4 ชั่วโมง

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

1. มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย ทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2. ตัวชี้วัด

ค 6.1 ม.6/1 ให้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

ค 6.1 ม.6/2 ให้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/3 ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/4 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

ค 6.1 ม.6/5 เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และนำความรู้ หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ

ค 6.1 ม.6/6 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

3. สาระสำคัญ

ลิมิตของฟังก์ชัน

4. จุดประสงค์การเรียนรู้ (K-P-A)

ด้านความรู้ (K): นักเรียนสามารถ

1) บอกความหมายของลิมิตของฟังก์ชันได้

2) บอกทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตและนำไปใช้ได้

3) หาลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

ด้านทักษะและกระบวนการ (P) : นักเรียนเกิดทักษะดังนี้

1) มีการแก้ปัญหา

2) มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

3) มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : นักเรียนสามารถ

1) คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง

2) นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กระตือรือร้น ชัดเจน และตรงประเด็น

3) ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย

5. สารการเรียนรู้

ลิมิตของฟังก์ชัน

บทนิยาม กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน

ถ้า x มีค่าเข้าใกล้ จำนวนจริง a แล้ว ทำให้ $f(x)$ เข้าใกล้ หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียว จะได้ว่า $f(x)$ มีลิมิต เท่ากับ L ขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

6. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

6.1 แจกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ

- บอกความหมายของลิมิตของฟังก์ชันได้
- บอกทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตและนำไปใช้ได้
- หาลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

6.2 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชัน โดยใช้ การถาม-ตอบ

ขั้นสอน

6.3 นักเรียนทำใบกิจกรรม รหัสที่ 3 แล้วร่วมกันสรุปความหมายของลิมิตของฟังก์ชัน โดยครูคอยอธิบายเพิ่มเติม แล้วบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 3 ดังนี้

บทนิยาม กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน

ถ้า x มีค่าเข้าใกล้ จำนวนจริง a แล้ว ทำให้ $f(x)$ เข้าใกล้ หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียว จะได้ว่า $f(x)$ มีลิมิต เท่ากับ L ขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

6.4 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 3.1 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้งหนึ่ง

6.5 ครูยกย่อง ชมเชย นักเรียนที่ทำแบบฝึกทักษะได้ถูกต้อง และทันตามกำหนดเวลา ส่วนนักเรียนทำผิด ครูก็อธิบายเพิ่มเติม และแนะนำให้ศึกษาใบกิจกรรม รหัสที่ 3 อีกครั้ง หรือศึกษาเนื้อหาเพิ่มเติมในห้องสมุด

6.6 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน โดยใช้การถาม-ตอบ

6.7 นักเรียนจับคู่กันศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 1 เรื่องทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตแล้วร่วมกันอภิปรายการนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตไปใช้จากตัวอย่าง หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 1

6.8 ครูเขียนโจทย์การหาลิมิตบนกระดาน จำนวน 3 ข้อ ดังนี้

1. จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2x - 4)$

2. จงหา $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x - 5}{x^2 - 3x}$

3. จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 1)^2$

แล้วให้นักเรียนอาสาออกมาทำบนกระดาน โดยมีครูและเพื่อนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง เพื่อเป็นการตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนอีกครั้ง และครูอธิบายเพิ่มเติม เมื่อนักเรียนสงสัย (ถ้ามี)

6.9 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 3.2 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

6.10 แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มละ 4 คน คละตามความสามารถ เพื่อเตรียมส่งตัวแทนเข้าร่วมแข่งขันโจทย์คณิตศาสตร์เกี่ยวกับการหาลิมิตของฟังก์ชัน กลุ่มละ 2 คน ในชั่วโมงหน้า

6.11 ชักถามปัญหานักเรียนเกี่ยวกับการทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 3.2 ว่ามีข้อสงสัยอะไรบ้างแล้ว ครูอธิบายเพิ่มเติมข้อที่นักเรียนทำผิดเป็นจำนวนมาก เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องและให้นักเรียนนำไปแก้ไขปรับปรุงตนเองในโอกาสต่อไป

ขั้นสรุป

6.12 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทของลิมิต โดยใช้การถาม-ตอบ ประกอบการอธิบายสรุป

6.13 นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนเข้าร่วมแข่งขันโจทย์คณิตศาสตร์เกี่ยวกับลิมิต กลุ่มละ 2 คน หน้าชั้นเรียน โดยจัดเป็นโต๊ะนั่งสอบ

6.14 นักเรียนแต่ละกลุ่มรับโจทย์คณิตศาสตร์จากครูผู้สอน แล้วดำเนินการแข่งขัน โดยให้เวลา 20 นาที

6.15 นักเรียนแต่ละกลุ่มกลับเข้ากลุ่มของตนเอง โดยครูนำกระดาษคำตอบของนักเรียนแต่ละกลุ่มให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเปลี่ยนกับตรวจตามครูเฉลย แล้วบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

6.16 ครูประกาศผลการแข่งขันและจัดกลุ่มที่ชนะอันดับที่ 1 , 2 และ 3 เพื่อรับรางวัล และติดที่ป้ายนิเทศหน้าชั้นเรียน

6.17 นักเรียนแต่ละกลุ่มจัดทำเอกสารฝึกหัดเพิ่มเติมเกี่ยวกับการหาลิมิต โดยเลือกทฤษฎีบทเพียง 1 ทฤษฎี ในการสร้างเอกสารฝึกหัดเพิ่มเติมส่งครูผู้สอนนอกเวลาเรียน เป็นผลงานของกลุ่ม

7. สื่อ / แหล่งการเรียนรู้

7.1 ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

7.2 ห้องสมุดโรงเรียน

7.3 อินเทอร์เน็ต

8. การวัดและประเมินผล (K-P-A)

จุดประสงค์ \ การวัดและประเมินผล	วิธีการวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
ความรู้ความเข้าใจ(K):นักเรียนสามารถบอกความหมายของลิมิตของฟังก์ชันนำทฤษฎีบทของลิมิตไปใช้นำลิมิตไปใช้ในการแก้ปัญหา	1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	1. แบบบันทึกการสังเกต 2. แบบฝึกหัด	นักเรียนทุกคนทำถูกต้องไม่ต่ำกว่าร้อยละ 70 ของคะแนนทั้งหมด
ด้านทักษะกระบวนการ(P): นักเรียนเกิดทักษะดังนี้ 1. มีการแก้ปัญหา 2. มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ 3. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะ(A):นักเรียนสามารถ 1. คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง 2. นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กะทัดรัดชัดเจน และตรงประเด็น 3. ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป

เกณฑ์การวัดและประเมินผล

เกณฑ์การประเมินผลจากการทำกิจกรรม

ร้อยละ 80 ขึ้นไป หมายถึง ดีมาก

ร้อยละ 70-79 หมายถึง ดี

ร้อยละ 60-69 หมายถึง ปานกลาง

ร้อยละ 50-59 หมายถึง พอใช้

ต่ำกว่า ร้อยละ 50 หมายถึง ปรับปรุง

ผ่านการประเมินตั้งแต่ ร้อยละ ขึ้นไป

9. บูรณาการหลักเศรษฐกิจพอเพียง

1. ผู้สอนใช้หลักเศรษฐกิจพอเพียงในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ประเด็น \ ปศพ	พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
กิจกรรมการเรียนรู้	ก่อนการจัดกิจกรรมมีการวางแผนการเรียนรู้ชัดเจนเป็นลำดับขั้นตอน มีการกำหนดเนื้อหาสาระและกระบวนการเหมาะสมกับนักเรียน ชั้น ม.6	จัดการเรียนรู้ตรงมาตรฐาน ตัวชี้วัดของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 มาตรฐานตัวชี้วัด ค 1.1	มีการวางแผนการจัดกิจกรรมที่ชัดเจน เป็นขั้นตอน จากง่ายไปยาก จากรูปธรรมไปหานามธรรม
เวลา	กำหนดเนื้อหาสาระตามมาตรฐาน ตัวชี้วัด ค 5.3 เพื่อให้เหมาะสมกับเวลาเรียน 2 ชั่วโมง นักเรียนทำกิจกรรมตามแผนการจัดการเรียนรู้ได้ทันตามเวลา	กิจกรรมการเรียนรู้บรรลุ ตัวชี้วัดได้ตามเวลาที่กำหนด	มีการถามตอบ ทำให้นักเรียนเข้าใจและทำงานอย่างมีความสุข
สื่อ	จัดเตรียมและใช้สื่อในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ มีแบบฝึกหัดเพียงพอกับนักเรียน	นักเรียนได้เรียนรู้จากง่ายไปหายากและเรียนรู้ด้วยความสุข	สื่อแบบฝึกหัดน่าสนใจและคุ้มค่า
แหล่งเรียนรู้	แหล่งเรียนรู้ที่ใช้เหมาะสมกับเนื้อหาสาระและกิจกรรม	นักเรียนใช้เป็นต้นแบบความคิดและปรับปรุงเป็นของตนเอง สะดวก ใช้งาน	-จัดห้องสื่อทันสมัย -สำรวจข้อมูลจากห้องสมุด -สำรวจข้อมูลจากอินเทอร์เน็ต
ความรู้ที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	-เทคนิควิธีการสอน รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ -ศึกษารูปแบบของแบบฝึก -วิเคราะห์และจัดทำเครื่องมือการวัดและประเมินผล -ศึกษา ค้นคว้าและนำหลักของปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียงมาบูรณาการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้		
คุณธรรม	-มีความรับผิดชอบในการปฏิบัติการสอน เข้าสอนตรงเวลา ปฏิบัติการสอนเต็มเวลา เต็มความสามารถ มีการเตรียมการสอน สื่อและแบบฝึกหัดไว้ล่วงหน้า -มีเมตตา ให้ความเสมอภาคและยุติธรรมกับนักเรียนทุกคน -มีความอดทน เสียสละ ใฝ่รู้ มีน้ำใจ		

คุณลักษณะ “อยู่อย่างพอเพียง”

พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
วางแผนในการทำงานรอบคอบเป็นระบบ และเตรียมอุปกรณ์การเรียนพร้อม	-มีความรู้ สามารถอธิบายการให้เหตุผลและสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาบางอย่างได้ - วิเคราะห์และเลือกวิธีที่สะดวกในการหาคำตอบ -มีความกระตือรือร้น สนใจเข้ากิจกรรม รู้จักการทำงานร่วมกับผู้อื่น	-ฝึกการทำงานโดยใช้ความคิดสร้างสรรค์ของตนเอง -สามารถใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และกระบวนการคิด -วิเคราะห์สาเหตุของการทำแบบฝึกหัดไม่ถูกต้องได้ด้วยตนเอง
ความรู้ (วิธีการ) - เรียนรู้จากแบบฝึกที่เป็นรูปธรรมไปหนามธรรม - เรียนรู้จากแบบฝึกง่ายไปหายาก - สามารถสรุปความคิดได้จากแบบฝึกหัด - ศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมได้จากแหล่งเรียนรู้ที่หลากหลาย ห้องสมุดกลุ่มสาระฯ ห้องสมุดโรงเรียน อินเทอร์เน็ต		
คุณธรรมที่เกิดกับนักเรียน - มีวินัย - ซื่อสัตย์สุจริต - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน - มีจิตสาธารณะ - มีความกระตือรือร้น		

3. ผลลัพธ์ KPA 4 มิติ ที่เกี่ยวข้องกับการอยู่อย่างพอเพียง

ผลลัพธ์	สมดุลและพร้อมต่อการเปลี่ยนแปลงในด้านต่าง ๆ			
	ด้านวัตถุ	ด้านสังคม	ด้านสิ่งแวดล้อม	ด้านวัฒนธรรม
ด้านความรู้	รู้จักกับการให้เหตุผล และสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา	มีความรู้ในการวางแผนการทำงาน		
ด้านทักษะ	สามารถอธิบาย การให้เหตุผล และนำไปใช้แก้ปัญหา	-สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้ -มีทักษะในการปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่นได้		
ด้านค่านิยม	เห็นคุณค่าของการให้เหตุผล	เห็นความสำคัญของการทำงานร่วมกับผู้อื่น		

10. บันทึกการจัดการเรียนรู้

ความคิดเห็นของผู้บริหาร

.....
.....
.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ผู้อำนวยการ/รองผู้อำนวยการ/หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้

...../...../.....

บันทึกผลการสอน

1. ผลการสอน

.....
.....
.....

2. ปัญหา/อุปสรรค

.....
.....
.....

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

.....
.....
.....

ลงชื่อ

(นายสุเมธ จันทรมบัติ) ผู้สอน

...../...../.....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	ใบกิจกรรม	รหัส ใบกิจกรรมที่ 3 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ชั่วโมงที่ 3 จำนวนชั่วโมง สอน 1 ชั่วโมง
--	-----------	---

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในตารางให้ถูกต้องสมบูรณ์ พร้อมทั้งสรุปผลที่ได้ตามตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง กำหนด $f(x) = x^2 + 4$ จงหาค่า $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2

วิธีทำ หาค่า $f(x)$ เมื่อการมีค่า x เข้าใกล้ 2 ทั้งทางซ้าย และ ทางขวา ดังตารางต่อไปนี้

x เข้าใกล้ 2 ทางซ้าย ($x < 2$)	
$x < 2$	$f(x)$
1	5.0000
1.5	6.2500
1.9	7.6100
1.99	7.9601
1.999	7.996001

x เข้าใกล้ 2 ทางขวา ($x > 2$)	
$x > 2$	$f(x)$
3	13.000
2.5	10.2500
2.45	10.0025
2.20	8.4100
2.001	8.0040

จากตารางพบว่า ขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางซ้าย $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 8

$$\text{จะใช้สัญลักษณ์ } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 8$$

ขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางขวา $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 8

$$\text{จะใช้สัญลักษณ์ } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 8$$

นั่นคือ ลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ 8 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ซึ่งจะแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2 = 8$$

1) ให้ $f(x) = x^2 + 1$ จงหาค่าของ $f(x)$

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 4

วิธีทำ

x เข้าใกล้ 4 ทางซ้าย	
$x < 4$	$f(x)$
3	
3.5	
3.9	
3.99	

จากตารางพบว่า

ขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 4 ทางซ้าย

$f(x)$ มีค่าเข้าใกล้

$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \dots\dots\dots$

x เข้าใกล้ 4 ทางขวา	
$x > 4$	$f(x)$
5	
4.9	
4.5	
4.01	

จากตารางพบว่า

ขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 4 ทางขวา

$f(x)$ มีค่าเข้าใกล้

$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \dots\dots\dots$

จากทั้งสองกรณี สรุปได้ว่า ขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 4

แล้ว $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้

$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + 1 = \dots\dots\dots$

2) ให้ $f(x) = x + 5$ จงหาค่าของ $f(x)$

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2

วิธีทำ

x เข้าใกล้ 2 ทางซ้าย	
$x < 2$	$f(x)$
1	
1.5	
1.7	
1.99	
1.999	

จะพบว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางซ้าย แล้ว

$f(x)$ มีค่าเข้าใกล้

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \dots\dots\dots$

x เข้าใกล้ 2 ทางขวา	
$x > 2$	$f(x)$
3	
2.5	
2.3	
2.1	
2.01	

จะพบว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางขวา แล้ว

$f(x)$ มีค่าเข้าใกล้

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots\dots\dots$

จากทั้งสองกรณี สรุปได้ว่า

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x + 5 = \dots\dots\dots$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 3.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ชั่วโมงที่ 2 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	-------------	--

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.1 – 1.2

คำชี้แจง ให้นักเรียนหาลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ แต่ละข้อต่อไปนี้ แล้วเติมคำตอบลงในตารางให้ถูกต้อง

ข้อ	คำถาม	คำตอบ																												
1	<table><tr><td>x</td><td>2</td><td>2.5</td><td>2.7</td><td>2.9</td><td>2.99</td><td>2.999</td></tr><tr><td>$f(x) = x + 2$</td><td>4</td><td>4.5</td><td>4.7</td><td>4.9</td><td>4.99</td><td>4.999</td></tr></table> <table><tr><td>x</td><td>4</td><td>3.5</td><td>3.2</td><td>3.01</td><td>3.001</td><td>3.0001</td></tr><tr><td>$f(x) = x + 2$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> จงหา 1.1 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ 1.2 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ 1.3 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$	x	2	2.5	2.7	2.9	2.99	2.999	$f(x) = x + 2$	4	4.5	4.7	4.9	4.99	4.999	x	4	3.5	3.2	3.01	3.001	3.0001	$f(x) = x + 2$							1.1 1.2 1.3
x	2	2.5	2.7	2.9	2.99	2.999																								
$f(x) = x + 2$	4	4.5	4.7	4.9	4.99	4.999																								
x	4	3.5	3.2	3.01	3.001	3.0001																								
$f(x) = x + 2$																														
2	<table><tr><td>x</td><td>4</td><td>4.5</td><td>4.9</td><td>4.99</td><td>4.999</td></tr><tr><td>$f(x) = x + 2$</td><td>18</td><td>22.25</td><td>26.01</td><td>26.901</td><td>26.9901</td></tr></table> <table><tr><td>x</td><td>6</td><td>5.5</td><td>5.01</td><td>5.001</td><td>5.0001</td></tr><tr><td>$f(x) = x + 2$</td><td>38</td><td>32.25</td><td>29.04</td><td>27.100</td><td>27.010</td></tr></table> จงหา 2.1 $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$ 2.2 $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$ 2.3 $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$	x	4	4.5	4.9	4.99	4.999	$f(x) = x + 2$	18	22.25	26.01	26.901	26.9901	x	6	5.5	5.01	5.001	5.0001	$f(x) = x + 2$	38	32.25	29.04	27.100	27.010	2.1 2.2 2.3				
x	4	4.5	4.9	4.99	4.999																									
$f(x) = x + 2$	18	22.25	26.01	26.901	26.9901																									
x	6	5.5	5.01	5.001	5.0001																									
$f(x) = x + 2$	38	32.25	29.04	27.100	27.010																									

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน..... พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 3.1

$$\begin{array}{lll} 1) & 1.1 & \lim_{x \rightarrow 3^-} x + 2 = 5 \\ & 1.2 & \lim_{x \rightarrow 3^+} x + 2 = 5 \\ & 1.3 & \lim_{x \rightarrow 3} x + 2 = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2) & 2.1 & \lim_{x \rightarrow 5^-} x^2 + 2 = 27 \\ & 2.2 & \lim_{x \rightarrow 5^+} x^2 + 2 = 27 \\ & 2.3 & \lim_{x \rightarrow 5} x^2 + 2 = 27 \end{array}$$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 3 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ชั่วโมงที่ 4-5 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	--------------------	---

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตและนำไปใช้ได้
- 1.2 หาลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

สาระสำคัญ

การหาลิมิตของฟังก์ชัน สามารถหาได้ง่าย และสะดวกขึ้นโดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

สาระการเรียนรู้

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้ จะไม่แสดงการพิสูจน์ แต่จะยกตัวอย่างแสดงการนำเอาทฤษฎีบทไปใช้ในการหาลิมิตของฟังก์ชัน ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท เมื่อ a, L และ M เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ แล้ว

1. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$
2. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
3. $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n, n \in \mathbb{I}^+$
4. $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ
5. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M$
6. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L - M$
7. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \cdot M$
8. $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0$
9. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n, n \in \mathbb{I}^+$
10. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, n \in \mathbb{I}^+ - \{1\} \text{ และ } \sqrt[n]{L} \in \mathbb{R}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2 + 3x}{x^2 - 4x} \right)$

วิธีทำ จากทฤษฎีบทข้อ 8 จะได้

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2 + 3x}{x^2 - 4x} \right) &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - 3x}{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 4x} \\ &= \frac{2 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x}{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 4 \lim_{x \rightarrow 2} x} \\ &= \frac{2(4) - 3(2)}{4 - 4(2)} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\lim_{x \rightarrow 4} x^3 + 2x - 6$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} x^3 + 2x - 6 &= \lim_{x \rightarrow 4} x^3 + \lim_{x \rightarrow 4} 2x - \lim_{x \rightarrow 4} 6 \\ &= 4^3 - 2 \lim_{x \rightarrow 4} x - 6 \\ &= 64 - (2 \times 4) - 6 \\ &= 50 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 1)^2$

$$\begin{aligned} &= \left[\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 1) \right]^2 \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 1 \right]^2 \\ &= [3^2 + 1]^2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - x)(2x - 5)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - x)(2x - 5) &= \lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - x) \cdot \lim_{x \rightarrow -3} (2x - 5) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow -3} x^2 - \lim_{x \rightarrow -3} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow -3} 2x - \lim_{x \rightarrow -3} 5 \right) \\ &= ((-3)^2 - (-3)) \left(2 \lim_{x \rightarrow -3} x - 5 \right) \\ &= (9 + 3)[(2 \times -3) - 5] \\ &= 12(-11) \\ &= -132 \end{aligned}$$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 3.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ชั่วโมงที่ 4-5 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	-------------	--

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.2-1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในตารางแต่ละข้อให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} 2x + 4$	
2	จงหา $\lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - 2x - 10$	
3	จงหา $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + 2x}{x^2 + 1}$	
4	จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3)^2$	
5	จงหา $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$	
6	จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x - 3}$	
7	จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{25 - x^2} - 4}{x + 3}$	

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน..... พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 3.2

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} 2x + 4$	20
2	จงหา $\lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - 2x - 10$	-2
3	จงหา $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + 2x}{x^2 + 1}$	3
4	จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3)^2$	36
5	จงหา $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$	4
6	จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x - 3}$	8
7	จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{25 - x^2} - 4}{x + 3}$	$\frac{3}{4}$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	โจทย์แข่งขันคณิตศาสตร์	เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน ใช้ประกอบแผนจัดการเรียนรู้ที่ 3 ชั่วโมงที่ 6 จำนวนชั่วโมง สอน 1 ชั่วโมง
--	------------------------	--

คำชี้แจง ให้นักเรียนที่เข้าร่วมแข่งขันหาค่าลิมิตของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้

แล้วเขียนคำตอบลงในกระดาษคำตอบที่ครูแจกให้ ใช้เวลาทำ 20 นาที

- 1) จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 3x - 6$
- 2) จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3}$
- 3) จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$
- 4) จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 4x}{x}$
- 5) จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$
- 6) จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 64}{x - 8}$
- 7) จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 4} (x + 3)(x - 6)$
- 8) จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - x^2}{8 + x}$
- 9) จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$
- 10) จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น

จำนวน 58 ชั่วโมง

เรื่อง ลิมิต

จำนวน 4 ชั่วโมง

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

1. มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย ทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2. ตัวชี้วัด

ค 6.1 ม.6/1 ให้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

ค 6.1 ม.6/2 ให้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/3 ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/4 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

ค 6.1 ม.6/5 เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และนำความรู้ หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ

ค 6.1 ม.6/6 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

3. สาระสำคัญ

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ความต่อเนื่องบนช่วง

4. จุดประสงค์การเรียนรู้ (K-P-A)

ด้านความรู้ (K): นักเรียนสามารถ

1) บอกความหมายของลิมิตของฟังก์ชันได้

2) บอกทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตและนำไปใช้ได้

3) หาลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

ด้านทักษะและกระบวนการ (P) : นักเรียนเกิดทักษะดังนี้

1) มีการแก้ปัญหา

2) มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

3) มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : นักเรียนสามารถ

- 1) คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง
- 2) นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กระตือรือร้น ชัดเจน และตรงประเด็น
- 3) ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย

5. สารการเรียนรู้

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

บทนิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริงใดๆ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ ฟังก์ชัน f มีสมบัติ ดังนี้

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง

บทนิยาม ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a, b) เมื่อฟังก์ชัน f นั้นต่อเนื่องที่ทุกๆ จุดบนช่วง (a, b) ในช่วงปิด

บทนิยาม ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ เมื่อ

1. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a, b)
2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
3. $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

6. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

6.1 แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ ว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ

- บอกความหมายของความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้
- บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดๆ หนึ่งได้
- บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (a, b) และ $[a, b]$ ได้

6.2 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาขีดจำกัด โดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับขีดจำกัด โดยใช้การถาม-ตอบ

ขั้นสอน

6.3 ครูซักถาม ปัญหาเกี่ยวกับการทำเอกสารฝึกหัดเพิ่มเติม ว่า กลุ่มใดมีปัญหาในการจัดทำอะไรบาง โดยครูอธิบายวิธีทำ และให้ดูตัวอย่างประกอบ

6.4 นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 4.1 โดยศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างให้ละเอียด แล้วร่วมกันสรุปความหมายของความต่อเนื่องจากฟังก์ชัน โดยครูคอยชี้แนะและอธิบายเพิ่มเติม หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 4

6.5 ครูเขียนโจทย์เกี่ยวกับการหาความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนกระดาน แล้วให้นักเรียนอาสาออกมาทำให้เพื่อนดู โดยมีครูและเพื่อนคอยตรวจสอบความถูกต้อง เพื่อเป็นการตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนอีกครั้ง

6.6 นักเรียนทำแบบฝึกหัด รหัสที่ 4.1 เป็นการบ้าน เพื่อเสริมทักษะความแม่นยำในการเรียนรู้ของนักเรียน

6.7 ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจแบบฝึกหัด รหัสที่ 4.1 ตามแผนภูมิเฉลยและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

6.8 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้การถาม-ตอบ

ขั้นสรุป

6.9 นักเรียนแต่ละกลุ่ม จับคู่กัน ศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 4.2 โดยศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างให้ละเอียด แล้วร่วมกันสรุปความหมายความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง (a, b) และ $[a, b]$ โดยครูคอยชี้แนะและอธิบายเพิ่มเติม หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 4

6.10 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 4.2 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

6.11 นักเรียนแต่ละกลุ่ม ศึกษาโจทย์เกี่ยวกับความต่อเนื่องบนช่วง (a, b) และ $[a, b]$ กลุ่มละ 1 ข้อ จัดทำเป็นรายงานส่งครูผู้สอนนอกเวลาเรียน

6.12 นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์หลังจากเรียนจบหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 (แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1-2) แล้ว เพื่อประเมินความก้าวหน้าของนักเรียน

7. สื่อ / แหล่งการเรียนรู้

7.1 ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

7.2 ห้องสมุดโรงเรียน

7.3 อินเทอร์เน็ต

8. การวัดและประเมินผล (K-P-A)

การวัดและประเมินผล จุดประสงค์	วิธีการวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
ความรู้ความเข้าใจ(K):นักเรียนสามารถบอกความหมายของความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้ บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดๆ หนึ่งได้ บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (a, b) และ $[a, b]$ ได้	1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	1. แบบบันทึกการสังเกต 2. แบบฝึกหัด	นักเรียนทุกคนทำถูกต้องไม่ต่ำกว่าร้อยละ 70 ของคะแนนทั้งหมด
ด้านทักษะกระบวนการ(P): นักเรียนเกิดทักษะดังนี้ 1. มีการแก้ปัญหา 2. มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ 3. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะ(A):นักเรียนสามารถ 1. คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง 2. นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กะทัดรัด ชัดเจน และตรงประเด็น 3. ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป

เกณฑ์การวัดและประเมินผล

เกณฑ์การประเมินผลจากการทำกิจกรรม

ร้อยละ 80 ขึ้นไป หมายถึง ดีมาก

ร้อยละ 70-79 หมายถึง ดี

ร้อยละ 60-69 หมายถึง ปานกลาง

ร้อยละ 50-59 หมายถึง พอใช้

ต่ำกว่า ร้อยละ 50 หมายถึง ปรับปรุง

ผ่านการประเมินตั้งแต่ ร้อยละ ขึ้นไป

9. บูรณาการหลักเศรษฐกิจพอเพียง

1. ผู้สอนใช้หลักเศรษฐกิจพอเพียงในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ประเด็น \ ปศพ	พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
กิจกรรมการเรียนรู้	ก่อนการจัดกิจกรรมมีการวางแผนการเรียนรู้ชัดเจน เป็นลำดับขั้นตอน มีการกำหนดเนื้อหาสาระและกระบวนการเหมาะสมกับนักเรียน ชั้น ม.6	จัดการเรียนรู้ตรงมาตรฐาน ตัวชี้วัดของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มาตรฐานตัวชี้วัด ค 1.1	มีการวางแผนการจัดกิจกรรมที่ชัดเจน เป็นขั้นตอน จากง่ายไปยาก จากรูปธรรมไปหานามธรรม
เวลา	กำหนดเนื้อหาสาระตามมาตรฐาน ตัวชี้วัด ค 5.3 เพื่อให้เหมาะสมกับเวลาเรียน 2 ชั่วโมง นักเรียนทำกิจกรรมตามแผนการจัดการเรียนรู้ได้ทันตามเวลา	กิจกรรมการเรียนรู้บรรลุ ตัวชี้วัดได้ตามเวลาที่กำหนด	มีการถามตอบ ทำให้นักเรียนเข้าใจและทำงานอย่างมีความสุข
สื่อ	จัดเตรียมและใช้สื่อในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ มีแบบฝึกหัดเพียงพอกับนักเรียน	นักเรียนได้เรียนรู้จากง่ายไปหายากและเรียนรู้อย่างมีความสุข	สื่อแบบฝึกหัดน่าสนใจและคุ้มค่า
แหล่งเรียนรู้	แหล่งเรียนรู้ที่ใช้เหมาะสมกับเนื้อหาสาระและกิจกรรม	นักเรียนใช้เป็นต้นแบบความคิดและปรับปรุงเป็นของตนเอง สะดวก ใช้งาน	-จัดห้องสื่อทันสมัย -สำรวจข้อมูลจากห้องสมุด -สำรวจข้อมูลจากอินเทอร์เน็ต
ความรู้ที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	-เทคนิควิธีการสอน รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ -ศึกษารูปแบบของแบบฝึก -วิเคราะห์และจัดทำเครื่องมือการวัดและประเมินผล -ศึกษา ค้นคว้าและนำหลักของปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียงมาบูรณาการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้		
คุณธรรม	-มีความรับผิดชอบในการปฏิบัติการสอน เข้าสอนตรงเวลา ปฏิบัติการสอนเต็มเวลา เต็มความสามารถ มีการเตรียมการสอน สื่อและแบบฝึกหัดไว้ล่วงหน้า -มีเมตตา ให้ความเสมอภาคและยุติธรรมกับนักเรียนทุกคน -มีความอดทน เสียสละ ใฝ่รู้ มีน้ำใจ		

คุณลักษณะ “อยู่อย่างพอเพียง”

พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
วางแผนในการทำงานรอบคอบเป็นระบบ และเตรียมอุปกรณ์การเรียนพร้อม	-มีความรู้ สามารถอธิบายการให้เหตุผลและสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาบางอย่างได้ - วิเคราะห์และเลือกวิธีที่สะดวกในการหาคำตอบ -มีความกระตือรือร้น สนใจเข้ากิจกรรม รู้จักการทำงานร่วมกับผู้อื่น	-ฝึกการทำงานโดยใช้ความคิดสร้างสรรค์ของตนเอง -สามารถใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และกระบวนการคิด -วิเคราะห์สาเหตุของการทำแบบฝึกหัดไม่ถูกต้องได้ด้วยตนเอง
ความรู้ (วิธีการ) - เรียนรู้จากแบบฝึกที่เป็นรูปธรรมไปหนามธรรม - เรียนรู้จากแบบฝึกง่ายไปหายาก - สามารถสรุปความคิดได้จากแบบฝึกหัด - ศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมได้จากแหล่งเรียนรู้ที่หลากหลาย ห้องสมุดกลุ่มสาระฯ ห้องสมุดโรงเรียน อินเทอร์เน็ต		
คุณธรรมที่เกิดกับนักเรียน - มีวินัย - ซื่อสัตย์สุจริต - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน - มีจิตสาธารณะ - มีความกระตือรือร้น		

3. ผลลัพธ์ KPA 4 มิติ ที่เกี่ยวข้องกับการอยู่อย่างพอเพียง

ผลลัพธ์	สมดุลและพร้อมต่อการเปลี่ยนแปลงในด้านต่าง ๆ			
	ด้านวัตถุ	ด้านสังคม	ด้านสิ่งแวดล้อม	ด้านวัฒนธรรม
ด้านความรู้	รู้จักกับการให้เหตุผล และสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา	มีความรู้ในการวางแผนการทำงาน		
ด้านทักษะ	สามารถอธิบาย การให้เหตุผล และนำไปใช้แก้ปัญหา	-สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้ -มีทักษะในการปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่นได้		
ด้านค่านิยม	เห็นคุณค่าของการให้เหตุผล	เห็นความสำคัญของการทำงานร่วมกับผู้อื่น		

10. บันทึกการจัดการเรียนรู้

ความคิดเห็นของผู้บริหาร

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ผู้อำนวยการ/รองผู้อำนวยการ/หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้

...../...../.....

บันทึกผลการสอน

1. ผลการสอน

.....

.....

.....

2. ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ

(นางสาวนิภาพร นาน้อย) ผู้สอน

...../...../.....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 4.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ชั่วโมงที่ 7-8 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	--------------------	---

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกความหมายของความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้
- 1.2 บอกได้ว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด ๆ หนึ่งได้

สาระสำคัญ

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง f จะต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ถ้า f มีสมบัติครบ 3 ประการ คือ

1. a ต้องอยู่ในโดเมน f และ หาค่า $f(a)$ ได้
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

สาระการเรียนรู้

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

โดยทั่วไป เราจะนิยามฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนี้

บทนิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ ฟังก์ชัน f มีสมบัติ ดังนี้

1. a ต้องอยู่ในโดเมน f และ หาค่า $f(a)$ ได้
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาว่า $f(x) = x^2 + 4$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

วิธีทำ การที่ f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ นั้น f จะต้องสมบัติครบ 3 ข้อ ตามนิยาม

$$\text{จาก } f(x) = x^2 + 4$$

$$1. f(2) = 2^2 + 4 = 8$$

แสดงว่า หาค่า $f(2)$ ได้

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 4 \\ &= 2^2 + 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

แสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ หาค่าได้

3. จากข้อ 1 และ 2 จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$\therefore$ ที่จุด $x = 2$ ฟังก์ชัน f มีลักษณะตามสมบัติทั้ง 3 ข้อ

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 2$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงพิจารณาว่า $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 3$ หรือไม่

วิธีทำ การที่ f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 3$ นั้น f จะต้องมีสมบัติครบ 3 ข้อ ตามนิยาม

$$\begin{aligned} \text{จาก } f(x) &= \frac{x^2-9}{x-3} \\ \therefore f(3) &= \frac{3^2-9}{3-3} \\ &= \frac{0}{0} \text{ ซึ่งไม่มีความหมาย} \end{aligned}$$

แสดงว่า หาค่า $f(3)$ ไม่ได้

$\therefore$ ฟังก์ชัน f ไม่มีลักษณะตามสมบัติข้อที่ 1

แสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 3$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & , x \neq 2 \\ 4 & , x = 2 \end{cases}$ จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

วิธีทำ การที่ f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ นั้น f จะต้องมีสมบัติครบ 3 ข้อ ตามนิยาม

$$\text{จาก } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & , x \neq 2 \\ 4 & , x = 2 \end{cases}$$

$$1. f(2) = 4$$

แสดงว่า หาค่า $f(2)$ และมีสมบัติตาม ข้อ 1

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

แสดงว่า หาค่า $f(x)$ ได้ และมีสมบัติตามข้อ 2

นั่นคือ f มีสมบัติครบ 3 ข้อ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ ตอบ

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 4.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ชั่วโมงที่ 7-8 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	-------------	--

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.1

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดกำหนดให้หรือไม่ โดยกาเครื่องหมาย ✓ ลงในตารางให้ถูกต้อง

ข้อ	ฟังก์ชันที่กำหนดให้	จุดที่กำหนดให้	ฟังก์ชันต่อเนื่อง ณ จุดกำหนดให้	
			เป็น	ไม่เป็น
1	$f(x) = 3x - 1$	$x = 0$		
2	$f(x) = 3x^2 + 5$	$x = -4$		
3	$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$	$x = 4$		
4	$f(x) = 2x^2 - 1$	$x = 3$		
5	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$	$x = 1$		
6	$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & , \text{เมื่อ } x \neq 3 \\ 6 & , \text{เมื่อ } x = 3 \end{cases}$	$x = 3$		
7	$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{เมื่อ } x \neq 1 \\ 2 & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$	$x = 1$		
8	$f(x) = \frac{1}{x}$	$x = 0$		

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 4.1

ข้อ	ฟังก์ชันที่กำหนดให้	จุดที่กำหนดให้	ฟังก์ชันต่อเนื่อง ณ จุดที่กำหนดให้	
			เป็น	ไม่เป็น
1	$f(x) = 3x - 1$	$x = 0$	✓	
2	$f(x) = 3x^2 + 5$	$x = -4$	✓	
3	$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$	$x = 4$	✓	
4	$f(x) = 2x^2 - 1$	$x = 3$	✓	
5	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$	$x = 1$		✓
6	$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} , & \text{เมื่อ } x \neq 3 \\ 6 & , \text{เมื่อ } x = 3 \end{cases}$	$x = 3$	✓	
7	$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{เมื่อ } x \neq 1 \\ 2 & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$	$x = 1$		✓
8	$f(x) = \frac{1}{x}$	$x = 0$		✓

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 4.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ชั่วโมงที่ 9 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	--------------------	---

จุดประสงค์การเรียนรู้

1.3 บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง บนช่วง (a, b) และ $[a, b]$ ได้

สาระสำคัญ

ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (a, b) และ $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องที่ ทุกๆ จุดในช่วง (a, b) และ ฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง (a, b) และ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ และ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

สาระการเรียนรู้

ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง

โดยทั่วไปเราสามารถนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วงเปิดหรือช่วงปิด ได้ดังนี้

บทนิยาม ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a, b) เมื่อ ฟังก์ชัน f นั้น ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดบนช่วง (a, b)

บทนิยาม ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ เมื่อ

1. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a, b)
2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
3. $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

วิธีทำ จาก $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

สามารถเขียนกราฟได้ดังนี้

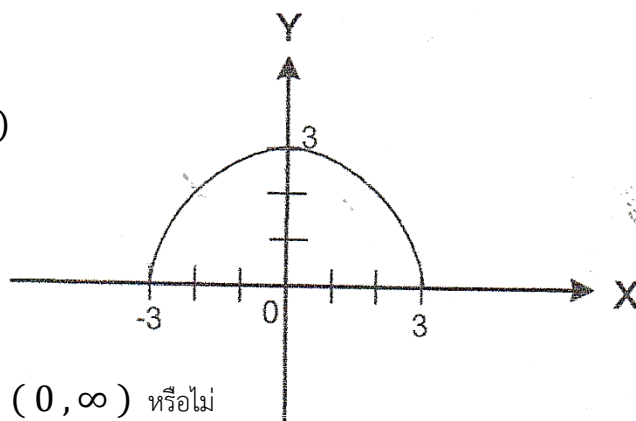
จะพบว่า 1. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด $(-3, 3)$

$$2. \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = f(-3) = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) = 0$$

จากข้อ 1, 2 และ 3 สรุปได้ว่า

f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[-3, 3]$



ตัวอย่างที่ 2 ฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{x}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(0, \infty)$ หรือไม่

วิธีทำ จาก $f(x) = \sqrt{x}$

ให้ $a \in (0, \infty)$

$$f(a) = \sqrt{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{a} = \sqrt{a}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ทุก $x \in (0, \infty)$

ตอบ

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 4.2

1. กำหนด $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$ จงพิจารณาว่า ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง $[-6, 6]$ หรือไม่

วิธีทำ จาก $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$

ให้ $a \in (-6, 6)$

$$\therefore f(a) = \sqrt{36 - a^2} \text{ ซึ่งหาค่าได้}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{36 - x^2} \\ = \sqrt{36 - a^2}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

จะได้ว่า f ต่อเนื่องที่ $x = a$ แต่

$$a \in (-6, 6)$$

ดังนั้น f ต่อเนื่องบนช่วง $(-6, 6)$

$$\text{เนื่องจาก } f(-6) = \sqrt{36 - (-6)^2} \\ = 0$$

$$\text{และ } f(6) = \sqrt{36 - (6)^2} \\ = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -6^+} \sqrt{36 - x^2} \\ = 0 \\ = f(-6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} \sqrt{36 - x^2} \\ = 0 \\ = f(6)$$

สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-6, 6]$

2. กำหนด $f(x) = \sqrt{49 - x^2}$ จงพิจารณาว่า ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง $[-7, 7]$ หรือไม่

วิธีทำ จาก $f(x) = \sqrt{49 - x^2}$

ให้ $a \in (-7, 7)$

$$\therefore f(a) = \sqrt{49 - a^2} \text{ ซึ่งหาค่าได้} \\ = \sqrt{49 - a^2}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

จะได้ว่า f ต่อเนื่องที่ $x = a$ แต่

$$a \in (-7, 7)$$

ดังนั้น f ต่อเนื่องบนช่วง $(-7, 7)$

เนื่องจาก $f(-7) = 0$ และ $f(7) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -7^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -7^+} \sqrt{49 - x^2} \\ = 0$$

$$= f(-7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^-} \sqrt{49 - x^2} \\ = 0$$

$$= f(7)$$

$\therefore f$ ต่อเนื่อง บนช่วง $[-7, 7]$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบสรุปเนื้อหา	รหัส แบบสรุปเนื้อหาที่ 4 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ชั่วโมงที่ 7-9 จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
--	----------------	---

คำชี้แจง ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาจากเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 2.1 – 2.2 ตามหัวข้อต่อไปนี้

1. ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ $a \in \mathbb{R}$ จะต้องนิสมบัติครบ 3 ข้อ คือ

1.1

1.2

1.3

2. ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ จะต้องนิสมบัติ ดังนี้

2.1

2.2

2.3

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์	หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน เวลา 1 ชั่วโมง
--	---------------------------	---

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำทุกข้อ

1. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3}$

2. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x + 3}$

3. กำหนด $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} & , x \neq 3 \\ 2x - 1 & , x = 3 \end{cases}$ ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = 3$ หรือไม่

4. กำหนด $f(x) = \sqrt{64 - x^2}$ ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง $[-8, 8]$ หรือไม่

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	ภาคเรียนที่ 1
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น	จำนวน 58 ชั่วโมง	
เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง	จำนวน 2 ชั่วโมง	
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/.....	วัน.....ที่	เดือน..... พ.ศ.
คาบที่		
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/.....	วัน.....ที่	เดือน..... พ.ศ.
คาบที่		

1. มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย ทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2. ตัวชี้วัด

ค 6.1 ม.6/1 ให้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

ค 6.1 ม.6/2 ให้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/3 ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/4 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

ค 6.1 ม.6/5 เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และนำความรู้ หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ

ค 6.1 ม.6/6 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

3. สาระสำคัญ

อัตราการเปลี่ยนแปลง

นิยาม ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ เมื่อค่า x เปลี่ยนเป็น $x + h$ โดยที่ $h \neq 0$ แล้ว ค่าของ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

เรียกว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย และค่าของ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ เรียกว่า อัตราการเปลี่ยนแปลง ณ x ใดๆ

4. จุดประสงค์การเรียนรู้ (K-P-A)

ด้านความรู้ (K): นักเรียนสามารถ

1) หาความเร็วในระยะเวลาใดๆ เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่ได้

2) บอกความหมายอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย และอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใดๆ ของฟังก์ชันได้

ด้านทักษะและกระบวนการ (P) : นักเรียนเกิดทักษะดังนี้

1) มีการแก้ปัญหา

2) มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

3) มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : นักเรียนสามารถ

- 1) คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง
- 2) นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กระตือรือร้น ชัดเจน และตรงประเด็น
- 3) ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย

5. สารการเรียนรู้

อัตราการเปลี่ยนแปลง

บทนิยาม ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนเป็น $x + h$ โดยที่ $h \neq 0$ ค่าของ y เปลี่ยนจาก $f(x)$ เป็น $f(x + h)$ แล้ว อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$ คือ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x มีค่าใดๆ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

6. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

6.1 แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ ว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ

- หาความเร็วในระยะเวลาใด ๆ เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่มากให้ได้
- บอกนิยามอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยและอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใดๆ ของฟังก์ชันได้
- หาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยขณะใดๆ ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

6.2 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชัน การหาค่าของฟังก์ชันที่กำหนดให้ โดยใช้การถาม-ตอบ

ขั้นสอน

6.3 นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 5 ศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างให้ละเอียด โดยครูคอยชี้แนะและอธิบายเพิ่มเติม เมื่อมีนักเรียนสงสัย หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 5

6.4 นักเรียนทำแบบฝึกหัด รหัสที่ 5 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลยและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

ขั้นสรุป

6.5 นักเรียนแต่ละกลุ่ม ร่วมมือกันสร้างโจทย์เกี่ยวกับอัตราการเปลี่ยนแปลง โดยการศึกษาจากหนังสือต่างๆ ที่ครูเตรียมไว้ ให้หรือจากโจทย์เกี่ยวกับอัตราการเปลี่ยนแปลงที่ครูเตรียมไว้ โดยการสร้างเลียนแบบหรือคิดขึ้นเอง โดยเขียนลงในกระดาษ A4 พร้อมทั้งแสดงวิธีทำ และตกแต่งให้สวยงาม นำส่งครูผู้สอนนอกเวลาเรียน

6.6 นักเรียนทำเอกสารฝึกหัดเพิ่มเติม รหัสที่ 5 เป็นการบ้าน เพื่อเสริมทักษะและความแม่นยำในการเรียนรู้

7. สื่อ / แหล่งการเรียนรู้

- 7.1 ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
- 7.2 ห้องสมุดโรงเรียน
- 7.3 อินเทอร์เน็ต

8. การวัดและประเมินผล (K-P-A)

การวัดและประเมินผล จุดประสงค์	วิธีการวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
ความรู้ความเข้าใจ(K):นักเรียนสามารถหาความเร็วในระยะเวลาใดๆ เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่มาให้ได้ บอกความหมายอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย และอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใดๆ ของฟังก์ชันได้	1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	1. แบบบันทึกการสังเกต 2. แบบฝึกหัด	นักเรียนทุกคนทำถูกต้องไม่ต่ำกว่าร้อยละ 70 ของคะแนนทั้งหมด
ด้านทักษะกระบวนการ(P): นักเรียนเกิดทักษะดังนี้ 1. มีการแก้ปัญหา 2. มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ 3. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะ(A):นักเรียนสามารถ 1. คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง 2. นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กะทัดรัด ชัดเจน และตรงประเด็น 3. ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป

เกณฑ์การวัดและประเมินผล

เกณฑ์การประเมินผลจากการทำกิจกรรม

ร้อยละ 80 ขึ้นไป หมายถึง ดีมาก

ร้อยละ 70-79 หมายถึง ดี

ร้อยละ 60-69 หมายถึง ปานกลาง

ร้อยละ 50-59 หมายถึง พอใช้

ต่ำกว่า ร้อยละ 50 หมายถึง ปรับปรุง

ผ่านการประเมินตั้งแต่ ร้อยละ ขึ้นไป

9. บูรณาการหลักเศรษฐกิจพอเพียง

1. ผู้สอนใช้หลักเศรษฐกิจพอเพียงในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ประเด็น / ปศพ	พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
กิจกรรมการเรียนรู้	ก่อนการจัดกิจกรรมมีการวางแผนการเรียนรู้ชัดเจน เป็นลำดับขั้นตอน มีการกำหนดเนื้อหาสาระและกระบวนการเหมาะสมกับนักเรียน ชั้น ม.6	จัดการเรียนรู้ตรงมาตรฐาน ตัวชี้วัดของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มาตรฐานตัวชี้วัด ค 1.1	มีการวางแผนการจัดกิจกรรมที่ชัดเจน เป็นขั้นตอน จากง่ายไปยาก จากรูธรรมไปหานามธรรม
เวลา	กำหนดเนื้อหาสาระตามมาตรฐาน ตัวชี้วัด ค 5.3 เพื่อให้เหมาะสมกับเวลาเรียน 2 ชั่วโมง นักเรียนทำกิจกรรมตามแผนการจัดการเรียนรู้ได้ทันตามเวลา	กิจกรรมการเรียนรู้บรรลุตัวชี้วัดได้ตามเวลาที่กำหนด	มีการถามตอบ ทำให้นักเรียนเข้าใจและทำงานอย่างมีความสุข
สื่อ	จัดเตรียมและใช้สื่อในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ มีแบบฝึกหัดเพียงพอกับนักเรียน	นักเรียนได้เรียนรู้จากง่ายไปหายากและเรียนรู้ด้วยความสุข	สื่อแบบฝึกหัดน่าสนใจและคุ้มค่า
แหล่งเรียนรู้	แหล่งเรียนรู้ที่ใช้เหมาะสมกับเนื้อหาสาระและกิจกรรม	นักเรียนใช้เป็นต้นแบบความคิดและปรับปรุงเป็นของตนเอง สะดวก ใช้งาน	-จัดห้องสื่อทันสมัย -สำรวจข้อมูลจากห้องสมุด -สำรวจข้อมูลจากอินเทอร์เน็ต
ความรู้ที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	-เทคนิควิธีการสอน รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ -ศึกษารูปแบบของแบบฝึก -วิเคราะห์และจัดทำเครื่องมือการวัดและประเมินผล -ศึกษา ค้นคว้าและนำหลักของปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียงมาบูรณาการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้		
คุณธรรม	-มีความรับผิดชอบในการปฏิบัติการสอน เข้าสอนตรงเวลา ปฏิบัติการสอนเต็มเวลา เต็มความสามารถ มีการเตรียมการสอน สื่อและแบบฝึกหัดไว้ล่วงหน้า -มีเมตตา ให้ความเสมอภาคและยุติธรรมกับนักเรียนทุกคน -มีความอดทน เสียสละ ใฝ่รู้ มีน้ำใจ		

คุณลักษณะ “อยู่อย่างพอเพียง”

พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
วางแผนในการทำงานรอบคอบเป็นระบบ และเตรียมอุปกรณ์การเรียนพร้อม	-มีความรู้ สามารถอธิบายการให้เหตุผลและสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาบางอย่างได้ - วิเคราะห์และเลือกวิธีที่สะดวกในการหาคำตอบ -มีความกระตือรือร้น สนใจเข้ากิจกรรม รู้จักการทำงานร่วมกับผู้อื่น	-ฝึกการทำงานโดยใช้ความคิดสร้างสรรค์ของตนเอง -สามารถใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และกระบวนการคิด -วิเคราะห์สาเหตุของการทำแบบฝึกหัดไม่ถูกต้องได้ด้วยตนเอง
ความรู้ (วิธีการ) - เรียนรู้จากแบบฝึกที่เป็นรูปธรรมไปหนามธรรม - เรียนรู้จากแบบฝึกง่ายไปหายาก - สามารถสรุปความคิดได้จากแบบฝึกหัด - ศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมได้จากแหล่งเรียนรู้ที่หลากหลาย ห้องสมุดกลุ่มสาระฯ ห้องสมุดโรงเรียน อินเทอร์เน็ต		
คุณธรรมที่เกิดกับนักเรียน - มีวินัย - ซื่อสัตย์สุจริต - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน - มีจิตสาธารณะ - มีความกระตือรือร้น		

3. ผลลัพธ์ KPA 4 มิติ ที่เกี่ยวข้องกับการอยู่อย่างพอเพียง

ผลลัพธ์	สมดุลและพร้อมต่อการเปลี่ยนแปลงในด้านต่าง ๆ			
	ด้านวัตถุ	ด้านสังคม	ด้านสิ่งแวดล้อม	ด้านวัฒนธรรม
ด้านความรู้	รู้จักกับการให้เหตุผล และสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา	มีความรู้ในการวางแผนการทำงาน		
ด้านทักษะ	สามารถอธิบาย การให้เหตุผล และนำไปใช้แก้ปัญหา	-สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้ -มีทักษะในการปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่นได้		
ด้านค่านิยม	เห็นคุณค่าของการให้เหตุผล	เห็นความสำคัญของการทำงานร่วมกับผู้อื่น		

10. บันทึกการจัดการเรียนรู้

ความคิดเห็นของผู้บริหาร

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ผู้อำนวยการ/รองผู้อำนวยการ/หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้

...../...../.....

บันทึกผลการสอน

1. ผลการสอน

.....

.....

.....

2. ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ

(นางสาวนิภาพร นาน้อย) ผู้สอน

...../...../.....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 5 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 ชั่วโมงที่ 10-11 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	--------------------	---

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 หาความเร็วในระยะเวลาใดๆ เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่มาให้ได้
- 1.2 บอกความหมายอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยและอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใดๆ ของฟังก์ชันได้
- 1.3 หาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย ขณะใดๆ ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

สาระสำคัญ

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ เมื่อค่า x เปลี่ยนเป็น $x + h$ โดยที่ $h \neq 0$ แล้ว ค่า $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ เรียกว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย และค่าของ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ เรียกว่า อัตราการเปลี่ยนแปลง ณ x ใดๆ

สาระการเรียนรู้

อัตราการเปลี่ยนแปลง

โดยทั่วไปอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยและอัตราการเปลี่ยนแปลง ขณะใดๆ ของฟังก์ชัน นิยามได้ดังนี้

บทนิยาม ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนเป็น $x + h$ โดยที่ $h \neq 0$ ค่าของ y เปลี่ยนจาก $f(x)$ เป็น $f(x + h)$ แล้ว อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$ คือ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x มีค่าใดๆ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

ตัวอย่าง ให้ $y = x^2 + 1$ จงหา

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง $x = 3$ ถึง $x = 5$
2. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ $x = 3$

วิธีทำ 1. จาก $y = f(x) = x^2 + 1$

และอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$ คือ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\therefore$ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง $x = 3$ ถึง $x = 5$ คือ

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(5^2+1)(3^2-1)}{5-3} \\ &= \frac{26-10}{2} \\ &= 8 \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

2. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x มีค่าใดๆ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

จาก $y = f(x) = x^2 + 1$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2hx + h^2 + 1 - x^2 - 1)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \\
&= 2x
\end{aligned}$$

$\therefore$ อัตราการเปลี่ยนแปลง ขณะที่ $x = 3$ คือ $2 \times 3 = 6$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดสมการการเคลื่อนที่ $S = 4.9t^2$ เมื่อ S เป็นระยะทางของการเคลื่อนที่ มีหน่วยเป็นเมตร และเวลา 1 วินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ S เทียบกับ t เปลี่ยนจาก 4 เป็น 4.5

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ S เทียบกับ t

$$\begin{aligned}
&= \frac{4.9(t+h)^2 - 4.9t^2}{h} \\
&= \frac{4.9(t^2 + 2th + h^2) - 4.9t^2}{h} \\
&= \frac{4.9t^2 + 9.8th + 4.9h^2 - 4.9t^2}{h} \\
&= \frac{9.8th + 4.9h^2}{h} \\
&= 9.8t + 4.9h
\end{aligned}$$

เมื่อ $t = 4$, $h = 4.5 - 4 = 0.5$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย} &= 9.8(4) + 4.9(0.5) \\
&= 39.2 + 24.5 \\
&= 41.65 \text{ เมตรต่อวินาที}
\end{aligned}$$

ตอบ

สรุป

การหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ x มีค่าใดๆ มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 หา $f(x)$

ขั้นที่ 2 หา $f(x+h)$

ขั้นที่ 3 หา $f(x+h) - f(x)$

ขั้นที่ 4 หา $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

ขั้นที่ 5 หา $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 5 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 ชั่วโมงที่ 10-11 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	-------------	--

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.2-1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำในแต่ละข้อให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	ให้ $f(x) = 2x^2 - 2x + 7$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x 1.1 เมื่อ x เปลี่ยนจาก 3 ไปเป็น 6 1.2 เมื่อ x เปลี่ยนจาก 4 ไปเป็น 8 1.3 เมื่อ x เปลี่ยนจาก 5 ไปเป็น 10	
2	ให้ $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะ $x = 5$	
3	จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของปริมาตรของทรงกลม เมื่อเทียบกับรัศมีตั้งแต่รัศมีเท่ากับ 2 นิ้ว ถึงรัศมีเท่ากับ 7 นิ้ว	
4	ให้ $f(x) = 3x^2 - 4x$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะ $x = 4$	

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 5

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	ให้ $f(x) = 2x^2 - 2x + 7$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x 1.1 เมื่อ x เปลี่ยนจาก 3 ไปเป็น 6 1.2 เมื่อ x เปลี่ยนจาก 4 ไปเป็น 8 1.3 เมื่อ x เปลี่ยนจาก 5 ไปเป็น 10	1.1 48 1.2 88 1.3 154
2	ให้ $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะ $x = 5$	65
3	จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของปริมาตรของทรงกลม เมื่อเทียบกับรัศมีตั้งแต่รัศมีเท่ากับ 2 นิ้ว ถึงรัศมีเท่ากับ 7 นิ้ว	$\frac{268\pi}{7}$ ลูกบาศก์นิ้ว/นิ้ว
4	ให้ $f(x) = 3x^2 - 4x$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะ $x = 4$	20

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบสรุปเนื้อหา	รหัส แบบสรุปเนื้อหาที่ 5 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 ชั่วโมงที่ 10-11 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	----------------	---

คำชี้แจง ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาจากเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 3 ตามหัวข้อต่อไปนี้

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$ คือ

.....

.....

.....

.....

2. อัตราเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x มีค่าใดๆ คือ

.....

.....

.....

.....

3. กำหนดให้ $y = x^3 - 3x$ แล้ว อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง $x = 3$ ถึง $x = 6$ คือ

.....

.....

.....

.....

4. จากโจทย์ ข้อ 3 อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ในช่วง $x = 7$ มีค่าเท่ากับ

.....

.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น จำนวน 58 ชั่วโมง

เรื่อง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้นิยาม จำนวน 4 ชั่วโมง

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

1. มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย ทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2. ตัวชี้วัด

ค 6.1 ม.6/1 ให้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

ค 6.1 ม.6/2 ให้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/3 ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/4 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

ค 6.1 ม.6/5 เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และนำความรู้ หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ

ค 6.1 ม.6/6 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

3. สาระสำคัญ

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้นิยาม

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

4. จุดประสงค์การเรียนรู้ (K-P-A)

ด้านความรู้ (K): นักเรียนสามารถ

1) บอกความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

2) หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้นิยามได้

ด้านทักษะและกระบวนการ (P) : นักเรียนเกิดทักษะดังนี้

1) มีการแก้ปัญหา

2) มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

3) มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : นักเรียนสามารถ

- 1) คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง
- 2) นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กระชับ ชัดเจน และตรงประเด็น
- 3) ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย

5. สารการเรียนรู้

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ใดๆ นิยามได้ดังนี้

บทนิยาม ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์ เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ หาค่าได้ เรียกค่าลิมิตที่ได้นี้ว่า “อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ” เขียนแทนด้วย $f'(x)$

จาก บทนิยาม จะได้ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ การหา $f'(x)$ เรียกว่า การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f

ถ้า $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ หาค่าไม่ได้ เราจะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f ไม่มีอนุพันธ์ที่ x

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x เช่น $\frac{dy}{dx}$ (อ่านว่า ดีวายบายดีเอ็กซ์), y' และ $\frac{d}{dx}f(x)$ เป็นต้น

หมายเหตุ 1. $\frac{dy}{dx} \neq \frac{x}{y}$ เพราะ $\frac{dy}{dx}$ คือ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ไม่ได้ หมายถึง d คูณ y หารด้วย d คูณ x

2. $\frac{dy}{dx}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ x มีค่าใดๆ

3. เมื่อ S แทนระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในเวลา t หรือ $S = f(t)$

ถ้า v คือความเร็ว ขณะเวลา t ใดๆ

$$\text{จะได้ } v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

$$\therefore S' = f'(t) = \frac{dS}{dt} = v$$

6. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

6.1 แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ ว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ

- บอกความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้
- หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้นิยามได้

6.2 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับอัตราการเปลี่ยนแปลง โดยใช้การถาม-ตอบ

ขั้นสอน

6.3 นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 6 แล้วร่วมกันสรุปขั้นตอนการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้ นิยาม โดยครูเดินดูรอบๆ เพื่อตอบปัญหาเมื่อมีนักเรียนสงสัย หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 6

6.4 ครูเขียนโจทย์เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน 2 ข้อ บนกระดาน แล้วให้นักเรียนร่วมกันหาอนุพันธ์ เพื่อเป็นการ ตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนอีกครั้งหนึ่ง ดังนี้

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = 2x^2 - x$

2. $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$

ขั้นสรุป

6.5 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 6 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลยและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

6.6 ถ้านักเรียนคนใดทำคะแนนจากการทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 6 ไม่ถึง 70% ครูจะให้นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 6 อีกครั้ง หรือครูสอนเพิ่มเติมนอกเวลาเรียน เพื่อเป็นการช่วยเหลือให้นักเรียนให้มีพัฒนาการในการเรียนรู้ได้ดีขึ้น ส่วนนักเรียนที่ทำได้คะแนน 70% ขึ้นไป จะได้รับการสอนเสริมพิเศษ (ถ้านักเรียนสนใจ)

7. สื่อ / แหล่งการเรียนรู้

7.1 ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

7.2 ห้องสมุดโรงเรียน

7.3 อินเทอร์เน็ต

8. การวัดและประเมินผล (K-P-A)

การวัดและประเมินผล จุดประสงค์	วิธีการวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
ความรู้ความเข้าใจ(K):นักเรียนสามารถบอกความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้ नियมได้	1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	1. แบบบันทึกการสังเกต 2. แบบฝึกหัด	นักเรียนทุกคนทำถูกต้องไม่ต่ำกว่าร้อยละ 70 ของคะแนนทั้งหมด
ด้านทักษะกระบวนการ(P): นักเรียนเกิดทักษะดังนี้ 1. มีการแก้ปัญหา 2. มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ 3. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะ(A):นักเรียนสามารถ 1. คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง 2. นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กะทัดรัด ชัดเจน และตรงประเด็น 3. ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป

เกณฑ์การวัดและประเมินผล

เกณฑ์การประเมินผลจากการทำกิจกรรม

ร้อยละ 80 ขึ้นไป หมายถึง ดีมาก

ร้อยละ 70-79 หมายถึง ดี

ร้อยละ 60-69 หมายถึง ปานกลาง

ร้อยละ 50-59 หมายถึง พอใช้

ต่ำกว่า ร้อยละ 50 หมายถึง ปรับปรุง

ผ่านการประเมินตั้งแต่ ร้อยละ ขึ้นไป

9. บูรณาการหลักเศรษฐกิจพอเพียง

1. ผู้สอนใช้หลักเศรษฐกิจพอเพียงในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ประเด็น \ ปศพ	พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
กิจกรรมการเรียนรู้	ก่อนการจัดกิจกรรมมีการวางแผนการเรียนรู้ชัดเจน เป็นลำดับขั้นตอน มีการกำหนดเนื้อหาสาระและกระบวนการเหมาะสมกับนักเรียน ชั้น ม.6	จัดการเรียนรู้ตรงมาตรฐาน ตัวชี้วัดของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มาตรฐานตัวชี้วัด ค 1.1	มีการวางแผนการจัดกิจกรรมที่ชัดเจน เป็นขั้นตอน จากง่ายไปยาก จากรูปธรรมไปหานามธรรม
เวลา	กำหนดเนื้อหาสาระตามมาตรฐาน ตัวชี้วัด ค 5.3 เพื่อให้เหมาะสมกับเวลาเรียน 2 ชั่วโมง นักเรียนทำกิจกรรมตามแผนการจัดการเรียนรู้ได้ทันตามเวลา	กิจกรรมการเรียนรู้บรรลุ ตัวชี้วัดได้ตามเวลาที่กำหนด	มีการถามตอบ ทำให้นักเรียนเข้าใจและทำงานอย่างมีความสุข
สื่อ	จัดเตรียมและใช้สื่อในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ มีแบบฝึกหัดเพียงพอกับนักเรียน	นักเรียนได้เรียนรู้จากง่ายไปหายากและเรียนรู้ด้วยความสุข	สื่อแบบฝึกหัดน่าสนใจและคุ้มค่า
แหล่งเรียนรู้	แหล่งเรียนรู้ที่ใช้เหมาะสมกับเนื้อหาสาระและกิจกรรม	นักเรียนใช้เป็นต้นแบบความคิดและปรับปรุงเป็นของตนเอง สะดวก ใช้งาน	-จัดห้องสื่อทันสมัย -สำรวจข้อมูลจากห้องสมุด -สำรวจข้อมูลจากอินเทอร์เน็ต
ความรู้ที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	-เทคนิควิธีการสอน รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ -ศึกษารูปแบบของแบบฝึก -วิเคราะห์และจัดทำเครื่องมือการวัดและประเมินผล -ศึกษา ค้นคว้าและนำหลักของปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียงมาบูรณาการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้		
คุณธรรม	-มีความรับผิดชอบในการปฏิบัติการสอน เข้าสอนตรงเวลา ปฏิบัติการสอนเต็มเวลา เต็มความสามารถ มีการเตรียมการสอน สื่อและแบบฝึกหัดไว้ล่วงหน้า -มีเมตตา ให้ความเสมอภาคและยุติธรรมกับนักเรียนทุกคน -มีความอดทน เสียสละ ใฝ่รู้ มีน้ำใจ		

คุณลักษณะ “อยู่อย่างพอเพียง”

พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
วางแผนในการทำงานรอบคอบเป็นระบบ และเตรียมอุปกรณ์การเรียนพร้อม	-มีความรู้ สามารถอธิบายการให้เหตุผลและสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาบางอย่างได้ - วิเคราะห์และเลือกวิธีที่สะดวกในการหาคำตอบ -มีความกระตือรือร้น สนใจเข้ากิจกรรม รู้จักการทำงานร่วมกับผู้อื่น	-ฝึกการทำงานโดยใช้ความคิดสร้างสรรค์ของตนเอง -สามารถใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และกระบวนการคิด -วิเคราะห์สาเหตุของการทำแบบฝึกหัดไม่ถูกต้องได้ด้วยตนเอง
ความรู้ (วิธีการ) - เรียนรู้จากแบบฝึกที่เป็นรูปธรรมไปหนามธรรม - เรียนรู้จากแบบฝึกง่ายไปหายาก - สามารถสรุปความคิดได้จากแบบฝึกหัด - ศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมได้จากแหล่งเรียนรู้ที่หลากหลาย ห้องสมุดกลุ่มสาระฯ ห้องสมุดโรงเรียน อินเทอร์เน็ต		
คุณธรรมที่เกิดกับนักเรียน - มีวินัย - ซื่อสัตย์สุจริต - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน - มีจิตสาธารณะ - มีความกระตือรือร้น		

3. ผลลัพธ์ KPA 4 มิติ ที่เกี่ยวข้องกับการอยู่อย่างพอเพียง

ผลลัพธ์	สมดุลและพร้อมต่อการเปลี่ยนแปลงในด้านต่าง ๆ			
	ด้านวัตถุ	ด้านสังคม	ด้านสิ่งแวดล้อม	ด้านวัฒนธรรม
ด้านความรู้	รู้จักกับการให้เหตุผล และสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา	มีความรู้ในการวางแผนการทำงาน		
ด้านทักษะ	สามารถอธิบาย การให้เหตุผล และนำไปใช้แก้ปัญหา	-สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้ -มีทักษะในการปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่นได้		
ด้านค่านิยม	เห็นคุณค่าของการให้เหตุผล	เห็นความสำคัญของการทำงานร่วมกับผู้อื่น		

10. บันทึกการจัดการเรียนรู้

ความคิดเห็นของผู้บริหาร

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ผู้อำนวยการ/รองผู้อำนวยการ/หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้

...../...../.....

บันทึกผลการสอน

1. ผลการสอน

.....

.....

.....

2. ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ

(นายสุเมธ จันทรมบัติ) ผู้สอน

...../...../.....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 6 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 ชั่วโมงที่ 12-13 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	--------------------	---

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้
- 1.2 หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ โดยใช้ नियามได้

สาระสำคัญ

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

สาระการเรียนรู้

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ใดๆ นิยามได้ดังนี้

บทนิยาม ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง และ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ หาค่าได้

เรียกค่า ลิมิตที่ได้นี้ว่า “อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ” เขียนแทนด้วย $f'(x)$

จากบทนิยาม จะได้ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ การหา f' เรียกว่า การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f

ถ้า $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ หาค่าไม่ได้ เราจะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f ไม่มีอนุพันธ์ที่ x

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x เช่น $\frac{dy}{dx}$ (อ่านว่า ดีวายบายดีเอกซ์), y' และ $\frac{d}{dx}f(x)$ เป็นต้น

หมายเหตุ 1. $\frac{dy}{dx} \neq \frac{x}{y}$ เพราะ $\frac{dy}{dx}$ คือ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ไม่ได้ หมายถึง d คูณ y หารด้วย d คูณ x

2. $\frac{dy}{dx}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ x มีค่าใดๆ

3. เมื่อ S แทนระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในเวลา t หรือ $S = f(t)$

ถ้า v คือความเร็ว ขณะเวลา t ใดๆ

$$\text{จะได้ } v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

$$\therefore S' = f'(t) = \frac{dS}{dt} = v$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $f(x) = 5 - 3x + x^2$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก

$$f(x) = 5 - 3x + x^2$$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= 5 - 3(x+h) + (x+h)^2 \\ &= 5 - 3x + 3h + x^2 + 2hx + h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= -3h + 2hx + h^2 \\ &= h(h + 2x - 3) \end{aligned}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = h + 2x - 3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x - 3)$$

$$\therefore f'(x) = 2x - 3$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $f(x) = 2x^2$ จงหา $f'(x)$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 - 2x^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + h^2 - 2x^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (4x + 2h) \\
 &= 4x
 \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + 2x^2$ ณ จุดที่ $x = -2$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \text{จาก} \quad f(x) &= x^3 + 2x^2 \\
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 + 2(x+h)^2 - (x^3 + 2x^2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 4hx + 2h^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 4x + 2h) \\
 &= 3x^2 + 4x \\
 f'(-2) &= 3(-2)^2 + 4(-2) \\
 &= 12 - 8 \\
 \therefore f'(-2) &= 4
 \end{aligned}$$

ตอบ

สรุป การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 แทนค่า x ด้วย $x + h$ ใน $f(x)$

ขั้นที่ 2 หา $f(x + h) - f(x)$

ขั้นที่ 3 หาค่า $f(x + h) - f(x)$ ด้วย h

ขั้นที่ 4 หา $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 6 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 ชั่วโมงที่ 12-13 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	-------------	--

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.1 - 1.2

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้	
	1.1 $f(x) = 2x^2 - x$	1.1
	1.2 $f(x) = 3x^2 - 6x + 7$	1.2
	1.3 $f(x) = 5x^3 - 6x$	1.3
	1.4 $f(x) = x^2 + 2x - 3$	1.4
	1.5 $f(x) = x^4$	1.5
2	จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ ณ จุดที่กำหนดให้	
	2.1 $f(x) = x^3 + x + 1$ ที่ $x = 1$	2.1
	2.2 $f(x) = x^2(x + 2)$ ที่ $x = -2$	2.2
	2.3 $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ ที่ $x = 2$	2.3

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 6

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้	
	1.1 $f(x) = 2x^2 - x$	1.1 $4x - 1$
	1.2 $f(x) = 3x^2 - 6x + 7$	1.2 $6x^2 - 6$
	1.3 $f(x) = 5x^3 - 6x$	1.3 $15x^2 - 6$
	1.4 $f(x) = x^2 + 2x - 3$	1.4 $2x + 2$
	1.5 $f(x) = x^4$	1.5 $4x^3$
2	จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ ณ จุดที่กำหนดให้	
	2.1 $f(x) = x^3 + x + 1$ ที่ $x = 1$	2.1 $f'(1) = 4$
	2.2 $f(x) = x^2(x + 2)$ ที่ $x = -2$	2.2 $f'(-2) = 20$
	2.3 $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ ที่ $x = 2$	2.3 $f'(2) = 5$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น

จำนวน 58 ชั่วโมง

เรื่อง ความชันของเส้นโค้ง

จำนวน 2 ชั่วโมง

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

1. มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย ทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2. ตัวชี้วัด

ค 6.1 ม.6/1 ให้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

ค 6.1 ม.6/2 ให้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/3 ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/4 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

ค 6.1 ม.6/5 เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และนำความรู้ หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ

ค 6.1 ม.6/6 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

3. สาระสำคัญ

การหาความชันของเส้นสัมผัสโค้ง ณ จุด $P(x, y)$ ใดๆ คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ซึ่งมีประโยชน์ในการหาค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

4. จุดประสงค์การเรียนรู้ (K-P-A)

ด้านความรู้ (K): นักเรียนสามารถ

- 1) บอกความหมายของเส้นสัมผัสเส้นโค้งได้
- 2) บอกความหมายของความชันของเส้นโค้งได้
- 3) หาความชันของเส้นโค้ง และสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ได้

ด้านทักษะและกระบวนการ (P) : นักเรียนเกิดทักษะดังนี้

- 1) มีการแก้ปัญหา
- 2) มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ
- 3) มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : นักเรียนสามารถ

- 1) คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง
- 2) นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กะทัดรัด ชัดเจน และตรงประเด็น
- 3) ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย

5. สารการเรียนรู้

ความชันของเส้นโค้งและความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

การหาความชันของเส้นโค้งและความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง สามารถหาได้จากนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม ถ้า $y = f(x)$ เป็นสมการของเส้นโค้งแล้ว เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P(x, y)$ ใดๆ จะเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีค่า

ความชันเท่ากับ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

บทนิยาม ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด $P(x, y)$ ใดๆ บนเส้นโค้ง หมายถึง ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P

6. กิจกรรมการเรียนรู้

ชั้นนำ

6.1 แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ ว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ

- บอกความหมายของเส้นสัมผัสเส้นโค้งได้
- บอกความหมายของความชันของเส้นโค้งได้
- หาความชันของเส้นโค้ง และสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ได้

6.2 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้นิยาม และความชันของเส้นตรง โดยการใช้การถาม-ตอบ

ขั้นสอน

6.3 นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 7.1 แล้วร่วมกันสรุปความหมายของความชันของเส้นโค้ง โดยครูคอยช่วยเหลือแนะนำ และอธิบายเพิ่มเติมเมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 7

6.4 นักเรียนแต่ละกลุ่มแข่งขันกันทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 7.1 ข้อ 1 - ข้อ 3 กลุ่มใดทำเสร็จก่อนและถูกต้องเป็นผู้ชนะ โดยใช้เวลา 15 นาที

6.5 ครูชมเชยนักเรียนที่ตั้งใจและร่วมกิจกรรมเป็นอย่างดี เพื่อเป็นการเสริมแรงในการเรียนรู้ของนักเรียน

6.6 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 7.1 ข้อ 4 - ข้อ 8 เป็นการบ้าน เพื่อเสริมทักษะและความแม่นยำในการเรียนรู้

6.7 ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 7.1 โดยครูให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้

6.8 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับความหมายของเส้นสัมผัสเส้นโค้งและความชันของเส้นโค้ง โดยการใช้การถาม-ตอบ

ขั้นสรุป

6.9 นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 7.2 แล้วร่วมกันอภิปรายกลุ่มย่อยเกี่ยวกับวิธีการหาความชันของเส้นโค้ง และสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง โดยครูคอยแก้ไขเพิ่มเติมให้ถูกต้อง หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 7

6.10 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 7.2 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลยและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

6.11 นักเรียนแต่ละกลุ่มจัดทำสมุดเล่มเล็กคณิตศาสตร์ เรื่องความชันของเส้นโค้ง ส่งครูผู้สอนนอกเวลาเรียน

7. สื่อ / แหล่งการเรียนรู้

7.1 ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

7.2 ห้องสมุดโรงเรียน

7.3 อินเทอร์เน็ต

8. การวัดและประเมินผล (K-P-A)

การวัดและประเมินผล จุดประสงค์	วิธีการวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
ความรู้ความเข้าใจ(K):นักเรียนสามารถบอกความหมายของเส้นสัมผัสเส้นโค้งได้ บอกความหมายของความชันของเส้นโค้งได้ หาความชันของเส้นโค้ง และสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ได้	1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	1. แบบบันทึกการสังเกต 2. แบบฝึกหัด	นักเรียนทุกคนทำถูกต้องไม่ต่ำกว่าร้อยละ 70 ของคะแนนทั้งหมด
ด้านทักษะกระบวนการ(P): นักเรียนเกิดทักษะดังนี้ 1. มีการแก้ปัญหา 2. มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ 3. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะ(A):นักเรียนสามารถ 1. คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง 2. นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กะทัดรัด ชัดเจน และตรงประเด็น 3. ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป

เกณฑ์การวัดและประเมินผล

เกณฑ์การประเมินผลจากการทำกิจกรรม

ร้อยละ 80 ขึ้นไป หมายถึง ดีมาก

ร้อยละ 70-79 หมายถึง ดี

ร้อยละ 60-69 หมายถึง ปานกลาง

ร้อยละ 50-59 หมายถึง พอใช้

ต่ำกว่า ร้อยละ 50 หมายถึง ปรับปรุง

ผ่านการประเมินตั้งแต่ ร้อยละ ขึ้นไป

9. บูรณาการหลักเศรษฐกิจพอเพียง

1. ผู้สอนใช้หลักเศรษฐกิจพอเพียงในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ประเด็น \ ปศพ	พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
กิจกรรมการเรียนรู้	ก่อนการจัดกิจกรรมมีการวางแผนการเรียนรู้ชัดเจน เป็นลำดับขั้นตอน มีการกำหนดเนื้อหาสาระและกระบวนการเหมาะสมกับนักเรียน ชั้น ม.6	จัดการเรียนรู้ตรงมาตรฐาน ตัวชี้วัดของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มาตรฐานตัวชี้วัด ค 1.1	มีการวางแผนการจัดกิจกรรมที่ชัดเจน เป็นขั้นตอน จากง่ายไปยาก จากรูปธรรมไปหานามธรรม
เวลา	กำหนดเนื้อหาสาระตามมาตรฐาน ตัวชี้วัด ค 5.3 เพื่อให้เหมาะสมกับเวลาเรียน 2 ชั่วโมง นักเรียนทำกิจกรรมตามแผนการจัดการเรียนรู้ได้ทันตามเวลา	กิจกรรมการเรียนรู้บรรลุ ตัวชี้วัดได้ตามเวลาที่กำหนด	มีการถามตอบ ทำให้นักเรียนเข้าใจและทำงานอย่างมีความสุข
สื่อ	จัดเตรียมและใช้สื่อในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ มีแบบฝึกหัดเพียงพอกับนักเรียน	นักเรียนได้เรียนรู้จากง่ายไปหายากและเรียนรู้ด้วยความสุข	สื่อแบบฝึกหัดน่าสนใจและคุ้มค่า
แหล่งเรียนรู้	แหล่งเรียนรู้ที่ใช้เหมาะสมกับเนื้อหาสาระและกิจกรรม	นักเรียนใช้เป็นต้นแบบความคิดและปรับปรุงเป็นของตนเอง สะดวก ใช้งาน	-จัดห้องสื่อทันสมัย -สำรวจข้อมูลจากห้องสมุด -สำรวจข้อมูลจากอินเทอร์เน็ต
ความรู้ที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	-เทคนิควิธีการสอน รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ -ศึกษารูปแบบของแบบฝึก -วิเคราะห์และจัดทำเครื่องมือการวัดและประเมินผล -ศึกษา ค้นคว้าและนำหลักของปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียงมาบูรณาการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้		
คุณธรรม	-มีความรับผิดชอบในการปฏิบัติการสอน เข้าสอนตรงเวลา ปฏิบัติการสอนเต็มเวลา เต็มความสามารถ มีการเตรียมการสอน สื่อและแบบฝึกหัดไว้ล่วงหน้า -มีเมตตา ให้ความเสมอภาคและยุติธรรมกับนักเรียนทุกคน -มีความอดทน เสียสละ ใฝ่รู้ มีน้ำใจ		

คุณลักษณะ “อยู่อย่างพอเพียง”

พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
วางแผนในการทำงานรอบคอบเป็นระบบ และเตรียมอุปกรณ์การเรียนพร้อม	-มีความรู้ สามารถอธิบายการให้เหตุผลและสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาบางอย่างได้ - วิเคราะห์และเลือกวิธีที่สะดวกในการหาคำตอบ -มีความกระตือรือร้น สนใจเข้ากิจกรรม รู้จักการทำงานร่วมกับผู้อื่น	-ฝึกการทำงานโดยใช้ความคิดสร้างสรรค์ของตนเอง -สามารถใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และกระบวนการคิด -วิเคราะห์สาเหตุของการทำแบบฝึกหัดไม่ถูกต้องได้ด้วยตนเอง
ความรู้ (วิธีการ) - เรียนรู้จากแบบฝึกที่เป็นรูปธรรมไปหนามธรรม - เรียนรู้จากแบบฝึกง่ายไปหายาก - สามารถสรุปความคิดได้จากแบบฝึกหัด - ศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมได้จากแหล่งเรียนรู้ที่หลากหลาย ห้องสมุดกลุ่มสาระฯ ห้องสมุดโรงเรียน อินเทอร์เน็ต		
คุณธรรมที่เกิดกับนักเรียน - มีวินัย - ซื่อสัตย์สุจริต - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน - มีจิตสาธารณะ - มีความกระตือรือร้น		

3. ผลลัพธ์ KPA 4 มิติ ที่เกี่ยวข้องกับการอยู่อย่างพอเพียง

ผลลัพธ์	สมดุลและพร้อมต่อการเปลี่ยนแปลงในด้านต่าง ๆ			
	ด้านวัตถุ	ด้านสังคม	ด้านสิ่งแวดล้อม	ด้านวัฒนธรรม
ด้านความรู้	รู้จักกับการให้เหตุผล และสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา	มีความรู้ในการวางแผนการทำงาน		
ด้านทักษะ	สามารถอธิบาย การให้เหตุผล และนำไปใช้แก้ปัญหา	-สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้ -มีทักษะในการปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่นได้		
ด้านค่านิยม	เห็นคุณค่าของการให้เหตุผล	เห็นความสำคัญของการทำงานร่วมกับผู้อื่น		

10. บันทึกการจัดการเรียนรู้

ความคิดเห็นของผู้บริหาร

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ผู้อำนวยการ/รองผู้อำนวยการ/หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้

...../...../.....

บันทึกผลการสอน

1. ผลการสอน

.....

.....

.....

2. ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ

(นายสุเมธ จันทรมบัติ) ผู้สอน

...../...../.....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 7.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 ชั่วโมงที่ 14 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	--------------------	--

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกความหมายของเส้นสัมผัสเส้นโค้งได้
- 1.2 บอกความหมายของความชันของเส้นโค้งได้

สาระสำคัญ

การหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด $P(x, y)$ ใดๆ คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ซึ่งมีประโยชน์ในการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

สาระการเรียนรู้

ความชันของเส้นโค้งและความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง สามารถหาได้จากนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม ถ้า $y = f(x)$ เป็นสมการของเส้นโค้งแล้ว เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P(x, y)$ ใดๆ จะเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P และ

มีค่าความชันเท่ากับ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

บทนิยาม ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด $P(x, y)$ ใดๆ บนเส้นโค้ง หมายถึง ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $f(x) = 5x^2 - 6$ เป็นสมการเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด $(3, 12)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 5x^2 - 6$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[5(x+h)^2-6]-(5x^2-6)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (10x + 5h) \\ &= 10x \end{aligned}$$

ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใดๆ $= 10x$

$$\therefore \text{ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด } (3, 12) = 10(3) = 30 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $f(x) = 3x - x^2$ จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(4, 6)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 3x - x^2$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(x+h)-(x+h)^2]-(3x-x^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (10x + 5h) \\ &= 10x \end{aligned}$$

ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใดๆ $= 10x$

$$\therefore \text{ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด } (3, 12) = 10(3) = 30 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 3 ให้ $y = x^3$ เป็นสมการเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด $(10,20)$

วิธีทำ จาก $y = x^3$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= x^3 \\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \\ &= 3x^2\end{aligned}$$

$$\text{ความชันของเส้นโค้งที่จุด } (x, y) \text{ ใดๆ} = 3x^2$$

$$\begin{aligned}\text{ความชันของเส้นโค้งที่จุด } (10,20) &= 3(10)^2 \\ &= 300\end{aligned}$$

สรุป

การหาความชันของเส้นโค้งและความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง หาได้จาก $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 7.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 ชั่วโมงที่ 14 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	-------------	---

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.1 - 1.2

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	ให้ $f(x) = x^2 - 4x$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด (6,3)	
2	ให้ $f(x) = 3x - 2x^2$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด (1,3)	
3	ถ้า $f(x) = 2x^2 - 10$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด (2,4)	
4	ถ้า $f(x) = 6x^2 - 1$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด (2,5)	
5	ให้ $f(x) = 4x^3$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (7,3)	
6	ให้ $f(x) = x^2 - x + 5$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (5,4)	
7	ให้ $f(x) = x^3 + 2x$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (6, -8)	
8	ให้ $f(x) = x^3 - x^2$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (12,8)	

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 7.1

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	ให้ $f(x) = x^2 - 4x$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด $(6,3)$	8
2	ให้ $f(x) = 3x - 2x^2$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด $(1,3)$	-1
3	ถ้า $f(x) = 2x^2 - 10$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด $(2,4)$	8
4	ถ้า $f(x) = 6x^2 - 1$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด $(2,5)$	24
5	ให้ $f(x) = 4x^3$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(7,3)$	588
6	ให้ $f(x) = x^2 - x + 5$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(5,4)$	8
7	ให้ $f(x) = x^3 + 2x$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(6,-8)$	110
8	ให้ $f(x) = x^3 - x^2$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(12,8)$	408

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 7.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 ชั่วโมงที่ 15-16 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	--------------------	---

จุดประสงค์การเรียนรู้

1.3 บอกความชันของเส้นโค้งและสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้

สาระสำคัญ

เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใดๆ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด (x, y) และมีความชันเท่ากับความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) จะมีสมการ คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$ เมื่อ m คือความชันของเส้นตรง

สาระการเรียนรู้

สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$ เมื่อ m คือ ความชันของเส้นตรง ซึ่งสามารถหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $y = x^2 - x$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(2, 2)$

วิธีทำ จาก $y = x^2 - x$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(x) &= x^2 - x \\
 \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 - (x+h)] - (x^2 - x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x - h - x^2 + x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 1) \\
 &= 2x - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด } (2, 2) &= (2 \times 2) - 1 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชันเท่ากับ m คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(2, 2)$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, 2)$ และมีความชันเท่ากับ 3

$\therefore$ สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง คือ $y - 2 = 3(x - 2)$

$$y - 2 = 3x - 6$$

$$3x - y - 4 = 0$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า $y = x - 3x^2$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(3, -3)$

วิธีทำ จาก $y = x - 3x^2$

หรือ $f(x) = x - 3x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)-3(x+h)^2]-(x-3x^2)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-3x^2-6xh-3h^2-x+3x^2)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} (1-6x-3h) \\
&= 1-6x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด } (3, -3) &= 1-6(3) \\
&= -17
\end{aligned}$$

สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชันเท่ากับ m คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$
 เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(3, -3)$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3, -3)$ และมีความชันเท่ากับ -17

$$\begin{aligned}
\therefore \text{สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง คือ } y - (-3) &= -17(x - 3) \\
y + 3 &= -17x + 51 \\
17x + y - 48 &= 0
\end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x^2 + 4$ ที่จุด ซึ่ง $x = 2$

วิธีทำ

$$\text{จาก } y = x^3 - 2x^2 + 4$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^3-2(x+h)^2+4]-(x^3-2x^2+4)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-2x^2-2xh-h^2+4-x^3+2x^2-4)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 4x - 2h) \\
&= 3x^2 - 4x
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด } (x, y) \text{ ใดๆ } = 3x^2 - 4x$$

$$\begin{aligned}
\text{ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด ที่ } x = 2 \text{ เท่ากับ } 3(2)^2 - 4(2) \\
&= 4
\end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } x = 2 \text{ จะได้ } y = 2^3 - 2(2)^2 + 4 = 4$$

$$\therefore \text{จุดสัมผัสเส้นโค้ง คือ จุด } (2, 4)$$

$$\text{สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง คือ } y - 4 = 4(x - 2)$$

$$y - 4 = 4x - 8$$

$$4x - y - 4 = 0$$

ตอบ

สรุป

การหาสมการเส้นสัมผัสโค้ง มีขั้นตอนดังนี้

- 1) หา $\frac{dy}{dx}$ ซึ่งเท่ากับ ความชันของเส้นโค้ง
- 2) หาจุดสัมผัสเส้นโค้ง คือ จุด (x, y)
- 3) หาสมการของเส้นสัมผัสโค้งจากสูตร

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 7.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 ชั่วโมงที่ 15-16 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	-------------	--

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.1 - 1.2

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 - 2x$ ที่จุด $(-1,3)$	
2	จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 4x^2 + 2x - 6$ ที่จุด $(6,4)$	
3	จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x^2 + 4$ ที่จุด $(2,4)$	
4	จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 - 2x + 1$ ที่จุด $(2,1)$	
5	จงหาสมการของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสโค้ง $y = 2x + 3\sqrt{x}$ ที่จุด $x = 4$	
6	ถ้า A เป็นจุดอยู่บนเส้นโค้ง $y = 2x^2 + 1$ และเส้นสัมผัสที่จุด A ขนานกับเส้นตรง $y + 4x = 0$ จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด A และตั้งฉากกับเส้นสัมผัส	

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 7.2

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 - 2x$ ที่จุด $(-1,3)$	$4x + y + 1 = 0$
2	จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 4x^2 + 2x - 6$ ที่จุด $(6,4)$	$5x - y - 296 = 0$
3	จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x^2 + 4$ ที่จุด $(2,4)$	$4x - y - 4 = 0$
4	จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 - 2x + 1$ ที่จุด $(2,1)$	$2x - y - 3 = 0$
5	จงหาสมการของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสโค้ง $y = 2x + 3\sqrt{x}$ ที่จุด $x = 4$	$4x + 11y - 170 = 0$
6	ถ้า A เป็นจุดอยู่บนเส้นโค้ง $y = 2x^2 + 1$ และเส้นสัมผัสที่จุด A ขนานกับเส้นตรง $y + 4x = 0$ จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด A และตั้งฉากกับเส้นสัมผัส	$x - 4y + 13 = 0$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น

จำนวน 58 ชั่วโมง

เรื่อง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร

จำนวน 8 ชั่วโมง

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

1. มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย ทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2. ตัวชี้วัด

ค 6.1 ม.6/1 ให้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

ค 6.1 ม.6/2 ให้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/3 ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/4 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

ค 6.1 ม.6/5 เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และนำความรู้ หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ

ค 6.1 ม.6/6 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

3. สาระสำคัญ

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันมีวิธีการหาอีกอย่างหนึ่งนอกจากการหาอนุพันธ์โดยใช้นิยาม ก็คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้สะดวกและรวดเร็วยิ่งขึ้น

4. จุดประสงค์การเรียนรู้ (K-P-A)

ด้านความรู้ (K): นักเรียนสามารถ

1) บอกสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

2) หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้สูตรได้

3) นำความรู้เรื่อง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรไปใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ได้

ด้านทักษะและกระบวนการ (P) : นักเรียนเกิดทักษะดังนี้

1) มีการแก้ปัญหา

2) มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

3) มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : นักเรียนสามารถ

- 1) คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง
- 2) นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กระตือรือร้น ชัดเจน และตรงประเด็น
- 3) ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย

5. สารการเรียนรู้

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร มีดังนี้

1. ถ้า $y = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แล้ว $\frac{dy}{dx} = 0$ นั่นคือ $\frac{d}{dx}(c) = 0$
2. ถ้า $y = x$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 1$ นั่นคือ $\frac{dx}{dx} = 1$
3. ถ้า $y = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริง แล้ว $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ นั่นคือ $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
4. ถ้า $y = f(x) + g(x)$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$
5. ถ้า $y = f(x) - g(x)$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$
6. ถ้า $y = cf(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แล้ว $\frac{dy}{dx} = c \frac{d}{dx} f(x)$
7. ถ้า $y = f(x) \cdot g(x)$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = f(x) \frac{d}{dx} g(x) + g(x) \frac{d}{dx} f(x)$

6. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

6.1 แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ ว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ

- บอกสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้
- พิสูจน์สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้
- หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้สูตรได้
- นำความรู้เรื่อง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยนใช้สูตรไปในการแก้ปัญหาโจทย์ได้

6.2 ครูซักถามปัญหาเกี่ยวกับการจัดทำสมุดเล่มเล็กคณิตศาสตร์ เรื่องความชันของเส้นโค้ง ว่ามีปัญหอะไรบ้าง โดยครูและนักเรียนแสดงความคิดเห็นร่วมกันและให้นักเรียนดูตัวอย่างสมุดเล่มเล็กคณิตศาสตร์ประกอบ

6.3 ครูเฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 7.2 ข้อที่นักเรียนทำผิดมากที่สุด เพื่อให้ให้นักเรียนรู้ข้อบกพร่องและนำไปแก้ไขปรับปรุง เพื่อให้เกิดการเรียนรู้ที่ถูกต้อง

6.4 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับความชันของเส้นโค้ง โดยใช้การถาม-ตอบ

ขั้นสอน

6.5 นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 8.1 โดยศึกษาตัวอย่างและเนื้อหา พิจารณาตัวอย่างให้ละเอียดแล้ว ร่วมกันสรุปวิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร โดยครูคอยอธิบายเพิ่มเติม ถ้ามีนักเรียนสงสัย หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 8

6.6 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 8.2 เป็นการบ้านเพื่อเสริมทักษะและความแม่นยำในการเรียนรู้

6.7 ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 8.1 และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

6.8 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร สูตรที่ 1 – 3 โดยใช้การถาม-ตอบ ดังนี้

1. ถ้า $y = -6$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าเท่าใด

2. ถ้า $y = x^3$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าเท่าใด
3. ถ้า $y = 5x^4$ แล้ว ค่าของ $\frac{dy}{dx}$ มีค่าเท่าใด

ฯลฯ

6.9 นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 8.2 แล้ว อภิปรายร่วมกันเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรที่ 4 – 6 โดยครูเดินดูรอบๆ คอยตอบข้อสงสัยของนักเรียน

6.10 นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนกลุ่มละ 1 คน ออกมาหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรที่ 4 – 6 เพื่อเป็นการตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน ดังนี้

1. ให้ $y = x^3 + 2x^2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$
2. ให้ $f(x) = 2x^6 + 3x^2 + 3x$ จงหา $f'(x)$
3. ให้ $f(x) = x^3 - 4x^2$ จงหา $f'(x)$
4. ให้ $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

6.11 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 8.2 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

6.12 นักเรียนแต่ละกลุ่ม จัดทำการตุณคณิตศาสตร์ เรื่อง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรที่ 4 – 6 เป็นผลงานกลุ่ม ส่งครูนอกเวลาเรียน

6.13 ครูเฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 8.2 ข้อที่นักเรียนทำผิดมากที่สุด เพื่อให้ให้นักเรียนได้เห็นข้อบกพร่องของตนเองและทำความเข้าใจได้ถูกต้องยิ่งขึ้น

6.14 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้สูตรที่ 4 – 6 โดยใช้การถาม-ตอบ

6.15 นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 8.3 แล้วร่วมกันสรุป วิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยสูตรที่ 7 – 8 โดยครูคอยอธิบายเพิ่มเติมเมื่อนักเรียนสงสัย หลังจากนั้นให้บันทึกสูตรที่ 7 – 8 ลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 8

6.16 ครูเขียนโจทย์เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยน้ใช้สูตรที่ 7 - 8 จำนวน 2 ข้อ บนกระดาน แล้วให้นักเรียนช่วยกันหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เพื่อเป็นการตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน

6.17 ครูชมเชยนักเรียนที่สนใจร่วมกิจกรรมเป็นอย่างดี และหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ถูกต้อง

6.18 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 8.3 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

6.19 นักเรียนแต่ละกลุ่มเตรียมส่งตัวแทนเข้าร่วมแข่งขันตอบปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร กลุ่มละ 2 คน ในชั่วโมงหน้า

6.20 นักเรียนทำการแข่งขันโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์หน้าชั้นเรียน ใช้เวลา 15 นาที เมื่อทำเสร็จตัวแทนกลุ่มนำเสนอส่งครูผู้สอน แล้วกลับที่นั่งตามเดิม

6.21 นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนมาตรวจให้คะแนนการแข่งขันตามแผนภูมิเฉลยที่ครูแจกให้ แล้วบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ หลังจากนั้นครูผู้สอบตรวจสอบและประกาศผลการแข่งขัน ผู้ชนะอันดับ 1 , 2 และ 3 และมอบรางวัล หรือให้คำยกย่องชมเชย เพื่อเป็นการเสริมแรงของนักเรียน

6.22 ครูชมเชยนักเรียนที่ให้ความสนใจในการแข่งขันเป็นอย่างดี และทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์โดยใช้สูตร โดยใช้การถาม - ตอบ

ขั้นสรุป

6.23 นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 8.4 แล้วร่วมกันสรุปขั้นตอนในการแก้ปัญหาโจทย์การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร โดยครูคอยแนะนำเพิ่มเติม (ถ้ามี) แล้วบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัส 8

6.24 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 8.4 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลยและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

6.25 นักเรียนแต่ละกลุ่มจัดทำแผนภูมิเกี่ยวกับสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยนตแต่งให้สวยงามเป็นผลงานของกลุ่ม ส่งครูผู้สอนนอกเวลาเรียน

7. สื่อ / แหล่งการเรียนรู้

7.1 ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

7.2 ห้องสมุดโรงเรียน

7.3 อินเทอร์เน็ต

8. การวัดและประเมินผล (K-P-A)

จุดประสงค์ \ การวัดและประเมินผล	วิธีการวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
ความรู้ความเข้าใจ(K):นักเรียนสามารถบอกสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้สูตรได้ นำความรู้เรื่อง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรไปใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ได้	1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	1. แบบบันทึกการสังเกต 2. แบบฝึกหัด	นักเรียนทุกคนทำถูกต้องไม่ต่ำกว่าร้อยละ 70 ของคะแนนทั้งหมด
ด้านทักษะกระบวนการ(P): นักเรียนเกิดทักษะดังนี้ 1. มีการแก้ปัญหา 2. มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ 3. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะ(A):นักเรียนสามารถ 1. คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง 2. นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กะทัดรัด ชัดเจน และตรงประเด็น 3. ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป

เกณฑ์การวัดและประเมินผล

เกณฑ์การประเมินผลจากการทำกิจกรรม

ร้อยละ 80 ขึ้นไป หมายถึง ดีมาก

ร้อยละ 70-79 หมายถึง ดี

ร้อยละ 60-69 หมายถึง ปานกลาง

ร้อยละ 50-59 หมายถึง พอใช้

ต่ำกว่า ร้อยละ 50 หมายถึง ปรับปรุง

ผ่านการประเมินตั้งแต่ ร้อยละ ขึ้นไป

9. บูรณาการหลักเศรษฐกิจพอเพียง

1. ผู้สอนใช้หลักเศรษฐกิจพอเพียงในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ประเด็น \ ปศพ	พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
กิจกรรมการเรียนรู้	ก่อนการจัดกิจกรรมมีการวางแผนการเรียนรู้ชัดเจน เป็นลำดับขั้นตอน มีการกำหนดเนื้อหาสาระและกระบวนการเหมาะสมกับนักเรียน ชั้น ม.6	จัดการเรียนรู้ตรงมาตรฐาน ตัวชี้วัดของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มาตรฐานตัวชี้วัด ค 1.1	มีการวางแผนการจัดกิจกรรมที่ชัดเจน เป็นขั้นตอน จากง่ายไปยาก จากรูปธรรมไปหานามธรรม
เวลา	กำหนดเนื้อหาสาระตามมาตรฐาน ตัวชี้วัด ค 5.3 เพื่อให้เหมาะสมกับเวลาเรียน 2 ชั่วโมง นักเรียนทำกิจกรรมตามแผนการจัดการเรียนรู้ได้ทันตามเวลา	กิจกรรมการเรียนรู้บรรลุ ตัวชี้วัดได้ตามเวลาที่กำหนด	มีการถามตอบ ทำให้นักเรียนเข้าใจและทำงานอย่างมีความสุข
สื่อ	จัดเตรียมและใช้สื่อในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ มีแบบฝึกหัดเพียงพอกับนักเรียน	นักเรียนได้เรียนรู้จากง่ายไปหายากและเรียนรู้ด้วยความสุข	สื่อแบบฝึกหัดน่าสนใจและคุ้มค่า
แหล่งเรียนรู้	แหล่งเรียนรู้ที่ใช้เหมาะสมกับเนื้อหาสาระและกิจกรรม	นักเรียนใช้เป็นต้นแบบความคิดและปรับปรุงเป็นของตนเอง สะดวก ใช้งาน	-จัดห้องสื่อทันสมัย -สำรวจข้อมูลจากห้องสมุด -สำรวจข้อมูลจากอินเทอร์เน็ต
ความรู้ที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	-เทคนิควิธีการสอน รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ -ศึกษารูปแบบของแบบฝึก -วิเคราะห์และจัดทำเครื่องมือการวัดและประเมินผล -ศึกษา ค้นคว้าและนำหลักของปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียงมาบูรณาการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้		
คุณธรรม	-มีความรับผิดชอบในการปฏิบัติการสอน เข้าสอนตรงเวลา ปฏิบัติการสอนเต็มเวลา เต็มความสามารถ มีการเตรียมการสอน สื่อและแบบฝึกหัดไว้ล่วงหน้า -มีเมตตา ให้ความเสมอภาคและยุติธรรมกับนักเรียนทุกคน -มีความอดทน เสียสละ ใฝ่รู้ มีน้ำใจ		

คุณลักษณะ “อยู่อย่างพอเพียง”

พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
วางแผนในการทำงานรอบคอบเป็นระบบ และเตรียมอุปกรณ์การเรียนพร้อม	-มีความรู้ สามารถอธิบายการให้เหตุผลและสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาบางอย่างได้ - วิเคราะห์และเลือกวิธีที่สะดวกในการหาคำตอบ -มีความกระตือรือร้น สนใจเข้ากิจกรรม รู้จักการทำงานร่วมกับผู้อื่น	-ฝึกการทำงานโดยใช้ความคิดสร้างสรรค์ของตนเอง -สามารถใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และกระบวนการคิด -วิเคราะห์สาเหตุของการทำแบบฝึกหัดไม่ถูกต้องได้ด้วยตนเอง
ความรู้ (วิธีการ) - เรียนรู้จากแบบฝึกที่เป็นรูปธรรมไปหนามธรรม - เรียนรู้จากแบบฝึกง่ายไปหายาก - สามารถสรุปความคิดได้จากแบบฝึกหัด - ศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมได้จากแหล่งเรียนรู้ที่หลากหลาย ห้องสมุดกลุ่มสาระฯ ห้องสมุดโรงเรียน อินเทอร์เน็ต		
คุณธรรมที่เกิดกับนักเรียน - มีวินัย - ซื่อสัตย์สุจริต - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน - มีจิตสาธารณะ - มีความกระตือรือร้น		

3. ผลลัพธ์ KPA 4 มิติ ที่เกี่ยวข้องกับการอยู่อย่างพอเพียง

ผลลัพธ์	สมดุลและพร้อมต่อการเปลี่ยนแปลงในด้านต่าง ๆ			
	ด้านวัตถุ	ด้านสังคม	ด้านสิ่งแวดล้อม	ด้านวัฒนธรรม
ด้านความรู้	รู้จักกับการให้เหตุผล และสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา	มีความรู้ในการวางแผนการทำงาน		
ด้านทักษะ	สามารถอธิบาย การให้เหตุผล และนำไปใช้แก้ปัญหา	-สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้ -มีทักษะในการปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่นได้		
ด้านค่านิยม	เห็นคุณค่าของการให้เหตุผล	เห็นความสำคัญของการทำงานร่วมกับผู้อื่น		

10. บันทึกการจัดการเรียนรู้

ความคิดเห็นของผู้บริหาร

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ผู้อำนวยการ/รองผู้อำนวยการ/หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้

...../...../.....

บันทึกผลการสอน

1. ผลการสอน

.....

.....

.....

2. ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ

(นางสาวนิภาพร นาน้อย) ผู้สอน

...../...../.....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 8.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 ชั่วโมงที่ 17 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	--------------------	--

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้
- 1.2 พิสูจน์สูตรบางสูตรของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้
- 1.3 หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้สูตรได้

สาระสำคัญ

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันมีวิธีการหาอีกอย่างหนึ่ง นอกจากการหาอนุพันธ์โดยใช้นิยามก็คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้สะดวกและรวดเร็วยิ่งขึ้น

สาระการเรียนรู้

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้สูตร

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร ในเอกสารชุดนี้มีสูตร ดังนี้

สูตรที่ 1 ถ้า $y = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แล้ว $\frac{dy}{dx} = 0$ นั่นคือ $\frac{d}{dx}(c) = 0$

พิสูจน์ จาก $f(x) = 0$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $y = -8$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(-8) \\ &= 0\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $y = 81$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(81) \\ &= 0\end{aligned}$$

สูตรที่ 2 ถ้า $y = x$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 1$ นั่นคือ $\frac{dx}{dx} = 1$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = x$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

ข้อสังเกต $\frac{dx}{dx} = 1$ หมายถึง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน y เทียบกับ x ที่ x ใดๆ เท่ากับ 1

สูตรที่ 3 ถ้า $y = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงแล้ว $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ นั่นคือ $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = x^6$ จงหาค่าของ $f'(x)$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^6) \\ &= 6x^{6-1} \\ &= 6x^5\end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $y = \frac{1}{x^4}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } \text{จาก } y &= \frac{1}{x^4} \\ &= x^{-4} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^{-4}) \\ &= -4x^{-4-1} \\ &= -4x^{-5} \\ &= -\frac{4}{x^5}\end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $y = \sqrt[4]{x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } \because \sqrt[4]{x} &= x^{\frac{1}{4}} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{4}}\right) \\ &= \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} \\ &= \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\end{aligned}$$

ตอบ

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 8.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 ชั่วโมงที่ 17 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	-------------	---

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	ถ้า $y = -10$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	
2	ถ้า $f(x) = 20$ แล้ว จงหา $f'(x)$	
3	ถ้า $f(x) = x^3$ แล้ว จงหา $f'(x)$	
4	ถ้า $y = 25$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าเท่าใด	
5	ถ้า $y = x^4$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	
6	ถ้า $y = \sqrt[3]{x}$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	
7	ถ้า $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ แล้ว จงหา $f'(x)$	
8	ถ้า $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ แล้ว จงหา $f'(x)$	
9	ถ้า $y = x^{\frac{5}{4}}$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	
10	ถ้า $f(x) = x^8$ จงหา $f'(x)$	

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลย แบบฝึกทักษะ

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	ถ้า $y = -10$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	0
2	ถ้า $f(x) = 20$ แล้ว จงหา $f'(x)$	0
3	ถ้า $f(x) = x^3$ แล้ว จงหา $f'(x)$	0
4	ถ้า $y = 25$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าเท่าใด	0
5	ถ้า $y = x^4$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	$4x^3$
6	ถ้า $y = \sqrt[3]{x}$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	$\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$
7	ถ้า $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ แล้ว จงหา $f'(x)$	$\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$
8	ถ้า $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ แล้ว จงหา $f'(x)$	$\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$
9	ถ้า $y = x^{\frac{5}{4}}$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	$\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$
10	ถ้า $f(x) = x^8$ จงหา $f'(x)$	$8x^7$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 8.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 ชั่วโมงที่ 18-19 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	--------------------	---

จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 บอกสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

1.2 หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้สูตรได้

สาระสำคัญ

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันมีวิธีการหาอีกอย่างหนึ่ง นอกจากการหาอนุพันธ์โดยใช้นิยามก็คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้สะดวกและรวดเร็วยิ่งขึ้น

สาระการเรียนรู้

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้สูตร (ต่อ)

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร ในเอกสารชุดนี้มีสูตร ดังนี้

สูตรที่ 4 ถ้า $y = f(x) + g(x)$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = \frac{d f(x)}{dx} + \frac{d g(x)}{dx}$

จากสูตรที่ 4 จะได้ว่า อนุพันธ์ของผลบวกของฟังก์ชัน เท่ากับ ผลบวกของอนุพันธ์

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $y = x^6 + 7$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = x^6 + 7$
จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x^6) + \frac{d}{dx} (7)$
 $= 6x^{6-1} + 0$
 $= 6x^5$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $y = x^4 + x^2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = x^4 + x^2$
จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x^4) + \frac{d}{dx} (x^2)$
 $= 4x^{4-1} + 2x^{2-1}$
 $= 4x^3 + 2x$

ตอบ

สูตรที่ 5 ถ้า $y = f(x) - g(x)$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$

จากสูตรที่ 5 จะได้ว่า อนุพันธ์ของผลต่างของฟังก์ชัน เท่ากับ ผลต่างของอนุพันธ์

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = x^3 - x^2$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3 - x^2$
 $f'(x) = \frac{d}{dx} (x^3) - \frac{d}{dx} (x^2)$
 $= 3x^{3-1} - 2x^{2-1}$
 $= 3x^2 - 2x$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $y = x^5 - x^3 - x^2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = x^5 - x^3 - x^2$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^5) - \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(x^2) \\ &= 5x^{5-1} - 3x^{3-1} - 2x^{2-1} \\ &= 5x^4 - 3x^2 - 2x\end{aligned}$$

ตอบ

สูตรที่ 6 ถ้า $y = cf(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แล้ว $\frac{dy}{dx} = c \frac{df(x)}{dx}$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $y = 5x^2 - 3x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ และ $f'(2)$

วิธีทำ จาก $y = 5x^2 - 3x$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(5x^2 - 3x) \\ &= 5 \frac{d}{dx}(x^2) - 3 \frac{dx}{dx} \\ &= 5(2x) - 3(1)\end{aligned}$$

$$\text{จาก } \frac{dy}{dx} = 10x - 3$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x) &= 10x - 3 \\ f'(2) &= 10(2) - 3 \\ &= 17\end{aligned}$$

ตอบ

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 8.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 ชั่วโมงที่ 20 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	-------------	---

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	ถ้า $y = x^3 + 25$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	
2	ถ้า $y = x^5 + x^4 + x + 2$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	
3	ถ้า $f'(x) = x^6 - x^3 - 10$ แล้ว จงหา $f'(x)$	
4	ถ้า $f'(x) = x^5 + x^4 - x^3 + 5$ แล้ว จงหา $f'(x)$	
5	ถ้า $y = 3x^4$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	
6	ถ้า $y = 6x^5 + 2x + 12$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	
7	ถ้า $f'(x) = 7x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 10x + 2$ แล้ว จงหา $f'(x)$	
8	ถ้า $f'(x) = 2x^6 - 3x^5 + 4x - 3$ แล้ว จงหา $f'(x)$	

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 8.2

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	ถ้า $y = x^3 + 25$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	$3x^2$
2	ถ้า $y = x^5 + x^4 + x + 2$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	$5x^4 + 4x^3 + 1$
3	ถ้า $f'(x) = x^6 - x^3 - 10$ แล้ว จงหา $f'(x)$	$6x^5 - 3x^2$
4	ถ้า $f'(x) = x^5 + x^4 - x^3 + 5$ แล้ว จงหา $f'(x)$	$5x^4 + 4x^3 - 3x^2$
5	ถ้า $y = 3x^4$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	$12x^3$
6	ถ้า $y = 6x^5 + 2x + 12$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	$30x^4 + 2$
7	ถ้า $f'(x) = 7x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 10x + 2$ แล้ว จงหา $f'(x)$	$28x^3 - 24x^2 + 10x - 10$
8	ถ้า $f'(x) = 2x^6 - 3x^5 + 4x - 3$ แล้ว จงหา $f'(x)$	$12x^5 - 15x^4 + 4$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 8.3 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 ชั่วโมงที่ 20 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	--------------------	--

จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 บอกสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

1.2 หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้สูตรได้

สาระสำคัญ

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันมีวิธีการหาอีกอย่างหนึ่ง นอกจากการหาอนุพันธ์โดยใช้นิยามก็คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้สะดวกและรวดเร็วยิ่งขึ้น

สาระการเรียนรู้

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้สูตร (ต่อ)

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร ในเอกสารชุดนี้มีสูตร ดังนี้

สูตรที่ 7 ถ้า $y = f(x) \cdot g(x)$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = f(x) \frac{d}{dx} g(x) + g(x) \frac{d}{dx} f(x)$

จากสูตรที่ 7 อาจเขียนได้ว่า $\frac{dy}{dx} = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $y = (x^2 - 2x + 3)(2x + 5)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = (x^2 - 2x + 3)(2x + 5)$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} [(x^2 - 2x + 3)(2x + 5)] \\
 &= (x^2 - 2x + 3) \frac{d}{dx} (2x + 5) + (2x + 5) \frac{d}{dx} (x^2 - 2x + 3) \\
 &= (x^2 - 2x + 3)(2 + 0) + (2x + 5)(2x - 2) \\
 &= (2x^2 - 4x + 6) + (2x + 5)(2x + 2) \\
 &= (2x^2 - 4x + 6) + (4x^2 + 6x - 10) \\
 &= 6x^2 + 2x - 4
 \end{aligned}$$

ตอบ

สูตรที่ 8 ถ้า $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ โดยที่ $g(x) \neq 0$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x) \frac{d}{dx} f(x) - f(x) \frac{d}{dx} g(x)}{[g(x)]^2}$

จากสูตรที่ 8 คงเขียนได้ว่า $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $y = \frac{3x-1}{3x+1}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \frac{3x-1}{3x+1}$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{d}{dx} [3x-1]}{(3x+1)^2} \\
 &= \frac{(3x+1) \frac{d}{dx} (3x-1) - (3x-1) \frac{d}{dx} (3x+1)}{(3x+1)^2} \\
 &= \frac{(3x+1)(3-0) - (3x-1)(3+0)}{(3x+1)^2} \\
 &= \frac{9x+3-9x+3}{(3x+1)^2}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{6}{(3x+1)^2}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3 ให้ $f(x) = \frac{4x^2-7x+2}{3x^2+4}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{4x^2-7x+2}{3x^2+4}$

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx} \frac{4x^2-7x+2}{3x^2+4}}{\frac{d}{dx} \frac{4x^2-7x+2}{3x^2+4}}$$

$$= \frac{(3x^2+4) \frac{d}{dx} (4x^2-7x+2) - (4x^2-7x+2) \frac{d}{dx} (3x^2+4)}{(3x^2+4)^2}$$

$$= \frac{(3x^2+4)(8x-7+0) - (4x^2-7x+2)(6x)}{(3x^2+4)^2}$$

$$= \frac{(24x^3-21x^2+32x-28) - (24x^3-42x^2+12x)}{(3x^2+4)^2}$$

$$= \frac{24x^3-21x^2+32x-28-24x^3+42x^2-12x}{(3x^2+4)^2}$$

$$= \frac{21x^2+20x-28}{(3x^2+4)^2}$$

ตอบ

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 8.3 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 ชั่วโมงที่ 20 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	-------------	---

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	กำหนดให้ $y = (2x + 1)(x + 3)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
2	กำหนดให้ $y = (x^2 + 2x + 3)(3x + 2)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
3	กำหนดให้ $f'(x) = (x + 2)(x + 4)$ จงหา $f'(x)$	
4	กำหนดให้ $f'(x) = (3x^2 + 1)(x + 2)$ จงหา $f'(x)$	
5	กำหนดให้ $y = \frac{(x+1)}{x-2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
6	กำหนดให้ $y = \frac{(1+4x)}{1-4x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
7	กำหนดให้ $y = \frac{(2x^2+3x-1)}{x-2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
8	กำหนดให้ $f'(x) = \frac{(2x^2+4x+1)}{x+3}$ จงหา $f'(x)$	

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลย แบบฝึกทักษะ ที่ 8.3

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	กำหนดให้ $y = (2x + 1)(x + 3)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	$4x + 7$
2	กำหนดให้ $y = (x^2 + 2x + 3)(3x + 2)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	$9x^2 + 16x + 13$
3	กำหนดให้ $f'(x) = (x + 2)(x + 4)$ จงหา $f'(x)$	$2x + 6$
4	กำหนดให้ $f'(x) = (3x^2 + 1)(x + 2)$ จงหา $f'(x)$	$9x^2 + 13x + 1$
5	กำหนดให้ $y = \frac{(x+1)}{x-2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	$-\frac{3}{(x-2)^2}$
6	กำหนดให้ $y = \frac{(1+4x)}{1-4x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	$\frac{8}{(1-4x)^2}$
7	กำหนดให้ $y = \frac{(2x^2+3x-1)}{x-2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	$\frac{2x^2 - 8x - 5}{(x-2)^2}$
8	กำหนดให้ $f'(x) = \frac{(2x^2+4x+1)}{x+3}$ จงหา $f'(x)$	$\frac{2x^2 + 12x + 11}{(x+3)^2}$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 8.4 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 ชั่วโมงที่ 21 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	--------------------	--

จุดประสงค์การเรียนรู้

1.4 นำความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร ไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้

สาระสำคัญ

สูตรในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันสามารถนำมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง และการเคลื่อนที่ของวัตถุได้

สาระการเรียนรู้

โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการใช้สูตรการหาอนุพันธ์

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจุดบนเส้นโค้ง $y = x^3 - 12x$ เมื่อเส้นสัมผัสที่จุดเหล่านั้นขนานกับ แกน X

วิธีทำ จาก $y = x^3 - 12x$
จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[x^3 - 12x]$
 $= 3x^2 - 12$

นั่นคือ เส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใดๆ จะมีความชัน เท่ากับ $3x^2 - 12$

แต่เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ขนาน กับ แกน X ก็คือ เส้นตรงที่มีความชันเป็นศูนย์

$$\begin{aligned}\therefore 3x^2 - 12 &= 0 \\ x^2 - 4 &= 0 \\ (x - 2)(x + 2) &= 0\end{aligned}$$

$\therefore$ จะได้ $x = 2$ หรือ $x = -2$

เมื่อ $x = 2$ จะได้ $y = (x)^3 - 12(2) = -16$

$x = -2$ จะได้ $y = (-2)^3 - 12(-2) = 16$

$\therefore$ จุดบนเส้นโค้งที่เส้นสัมผัสที่จุดนั้นขนานกับแกน X คือ จุด $(-2, 16)$ และ $(2, -16)$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดบนเส้นโค้ง $y = \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$ ที่ทำให้เส้นสัมผัสที่จุดดังกล่าวตั้งฉากกับ เส้นตรง

$$x - 2y + 4 = 0$$

วิธีทำ ให้ $P(m, n)$ เป็นจุดที่ต้องการหา

เนื่องจากจุด P อยู่บนเส้นโค้ง $y = \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$ จะได้ว่า

$$n = \frac{3}{2}m^2 + 4m + 1 \dots\dots\dots (1)$$

จาก $y = \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = 3x + 2$ ซึ่งคือความชันของเส้นสัมผัสที่จุด (x, y) ใดๆ

แต่เส้นสัมผัสที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $x - 2y + 4 = 0$ ซึ่งมีความชันเท่ากับ $\frac{1}{2}$

$\therefore$ เส้นสัมผัส จะมีความชัน เท่ากับ -2

$$\therefore 3x + 4 = -2$$

$$3x = -6$$

$$x = -2$$

นั่นคือ จะได้ $m = -2$ นำไปแทนค่าใน (1) จะได้

$$n = \frac{3}{2}(-2)^2 + 4(-2) + 1 = -1$$

$\therefore$ จุด P ที่ต้องการ คือ $(-2, -1)$ ตอบ

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 8.4 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 ชั่วโมงที่ 21 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	-------------	---

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	จงหาสมการของเส้นสัมผัสและเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 + x - 1$ ที่จุด $x = 1$	
2	จงหาสมการของเส้นสัมผัสและเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x^2 + 3$ ที่จุด $x = 2$	
3	จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ ที่จุด $x = 4$	
4	จงหาจุดบนเส้นโค้ง $y = x^3 - 3x$ ที่เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนั้นขนานกับแกน X	
5	วัตถุชนิดหนึ่งเคลื่อนที่ตามสมการ $S = t^3 - 2t + 5$ เมื่อ S เป็น ระยะทาง มีหน่วยเป็นเมตร t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที จงหาความเร็วของวัตถุนั้นในขณะ $t = 10$ วินาที	

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลย แบบฝึกทักษะ ที่ 8.4

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	จงหาสมการของเส้นสัมผัส และ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 + x - 1$ ที่จุด $x = 1$	$3x - y - 2 = 0$; $x + 3y - 4 = 0$
2	จงหาสมการของเส้นสัมผัส และ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x^2 + 3$ ที่จุด $x = 2$	$4x - y - 5 = 0$; $x + 4y - 14 = 0$
3	จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ ที่จุด $x = 4$	$x - 4y + 4 = 0$
4	จงหาจุดบนเส้นโค้ง $y = x^3 - 3x$ ที่เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนั้นขนานกับแกน X	$(1, -2)$ และ $(-1, 2)$
5	วัตถุชนิดหนึ่งเคลื่อนที่ตามสมการ $S = t^3 - 2t + 5$ เมื่อ S เป็น ระยะทาง มีหน่วยเป็นเมตร t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที จงหาความเร็วของวัตถุนั้นในขณะ $t = 10$ วินาที	298 เมตรต่อวินาที

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น

จำนวน 58 ชั่วโมง

เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท

จำนวน 2 ชั่วโมง

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

1. มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย ทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2. ตัวชี้วัด

ค 6.1 ม.6/1 ให้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

ค 6.1 ม.6/2 ให้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/3 ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/4 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

ค 6.1 ม.6/5 เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และนำความรู้ หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ

ค 6.1 ม.6/6 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

3. สาระสำคัญ

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันมีวิธีการหาอีกอย่างหนึ่งนอกจากการหาอนุพันธ์โดยใช้ नियาม ก็คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้สะดวกและรวดเร็วยิ่งขึ้น

4. จุดประสงค์การเรียนรู้ (K-P-A)

ด้านความรู้ (K): นักเรียนสามารถ

- 1) บอกความหมายของฟังก์ชันคอมโพสิทได้
- 2) บอกกฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิทได้
- 3) หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิทได้

ด้านทักษะและกระบวนการ (P) : นักเรียนเกิดทักษะดังนี้

- 1) มีการแก้ปัญหา
- 2) มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ
- 3) มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : นักเรียนสามารถ

- 1) คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง
- 2) นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กระชับ ชัดเจน และตรงประเด็น
- 3) ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย

5. สารการเรียนรู้

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร มีดังนี้

$$\text{ให้ } y = u^n \quad \text{จะได้ว่า} \quad \frac{dy}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

6. กิจกรรมการเรียนรู้

ชั้นนำ

6.1 แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ ว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ

- บอกความหมายของฟังก์ชันคอมโพสิทได้
- บอกกฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิทได้
- หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิทได้

6.2 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรที่ 1-8 โดยใช้การถาม-ตอบ

ขั้นสอน

6.3 นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบกิจกรรม รหัสที่ 9.1 แล้วร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับความหมายของฟังก์ชันคอมโพสิท โดยครูเดินดูรอบๆ และช่วยเหลือนักเรียนเมื่อมีปัญหาสงสัย

6.6 นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบกิจกรรม รหัสที่ 9.2 ตามตัวอย่าง แล้วร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิทว่ามีวิธีการหาอย่างไร โดยครูคอยชี้แนะและอธิบายเพิ่มเติมแล้วบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 9

6.5 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 9 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

ขั้นสรุป

6.6 นักเรียนแต่ละกลุ่มหาโจทย์เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท กลุ่มละ 10 ข้อ จากหนังสือต่างๆ ในห้องสมุดหรืออินเทอร์เน็ต แล้วส่งตัวแทนนำเสนอหน้าชั้นเรียน และทำเป็นรายงานส่งเป็นผลงานของกลุ่ม

7. สื่อ / แหล่งการเรียนรู้

- 7.1 ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
- 7.2 ห้องสมุดโรงเรียน
- 7.3 อินเทอร์เน็ต

8. การวัดและประเมินผล (K-P-A)

การวัดและประเมินผล จุดประสงค์	วิธีการวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
ความรู้ความเข้าใจ(K):นักเรียนสามารถบอกความหมายของฟังก์ชันคอมโพสิทได้ บอกกฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิทได้ หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิทได้	1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	1. แบบบันทึกการสังเกต 2. แบบฝึกหัด	นักเรียนทุกคนทำถูกต้องไม่ต่ำกว่าร้อยละ 70 ของคะแนนทั้งหมด
ด้านทักษะกระบวนการ(P): นักเรียนเกิดทักษะดังนี้ 1. มีการแก้ปัญหา 2. มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ 3. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะ(A):นักเรียนสามารถ 1. คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง 2. นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กะทัดรัด ชัดเจน และตรงประเด็น 3. ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป

เกณฑ์การวัดและประเมินผล

เกณฑ์การประเมินผลจากการทำกิจกรรม

ร้อยละ 80 ขึ้นไป หมายถึง ดีมาก

ร้อยละ 70-79 หมายถึง ดี

ร้อยละ 60-69 หมายถึง ปานกลาง

ร้อยละ 50-59 หมายถึง พอใช้

ต่ำกว่า ร้อยละ 50 หมายถึง ปรับปรุง

ผ่านการประเมินตั้งแต่ ร้อยละ ขึ้นไป

9. บูรณาการหลักเศรษฐกิจพอเพียง

1. ผู้สอนใช้หลักเศรษฐกิจพอเพียงในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ประเด็น \ ปศพ	พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
กิจกรรมการเรียนรู้	ก่อนการจัดกิจกรรมมีการวางแผนการเรียนรู้ชัดเจน เป็นลำดับขั้นตอน มีการกำหนดเนื้อหาสาระและกระบวนการเหมาะสมกับนักเรียน ชั้น ม.6	จัดการเรียนรู้ตรงมาตรฐาน ตัวชี้วัดของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มาตรฐานตัวชี้วัด ค 1.1	มีการวางแผนการจัดกิจกรรมที่ชัดเจน เป็นขั้นตอน จากง่ายไปยาก จากรูปธรรมไปหานามธรรม
เวลา	กำหนดเนื้อหาสาระตามมาตรฐาน ตัวชี้วัด ค 5.3 เพื่อให้เหมาะสมกับเวลาเรียน 2 ชั่วโมง นักเรียนทำกิจกรรมตามแผนการจัดการเรียนรู้ได้ทันตามเวลา	กิจกรรมการเรียนรู้บรรลุ ตัวชี้วัดได้ตามเวลาที่กำหนด	มีการถามตอบ ทำให้นักเรียนเข้าใจและทำงานอย่างมีความสุข
สื่อ	จัดเตรียมและใช้สื่อในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ มีแบบฝึกหัดเพียงพอกับนักเรียน	นักเรียนได้เรียนรู้จากง่ายไปหายากและเรียนรู้ด้วยความสุข	สื่อแบบฝึกหัดน่าสนใจและคุ้มค่า
แหล่งเรียนรู้	แหล่งเรียนรู้ที่ใช้เหมาะสมกับเนื้อหาสาระและกิจกรรม	นักเรียนใช้เป็นต้นแบบความคิดและปรับปรุงเป็นของตนเอง สะดวก ใช้งาน	-จัดห้องสื่อทันสมัย -สำรวจข้อมูลจากห้องสมุด -สำรวจข้อมูลจากอินเทอร์เน็ต
ความรู้ที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	-เทคนิควิธีการสอน รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ -ศึกษารูปแบบของแบบฝึก -วิเคราะห์และจัดทำเครื่องมือการวัดและประเมินผล -ศึกษา ค้นคว้าและนำหลักของปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียงมาบูรณาการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้		
คุณธรรม	-มีความรับผิดชอบในการปฏิบัติการสอน เข้าสอนตรงเวลา ปฏิบัติการสอนเต็มเวลา เต็มความสามารถ มีการเตรียมการสอน สื่อและแบบฝึกหัดไว้ล่วงหน้า -มีเมตตา ให้ความเสมอภาคและยุติธรรมกับนักเรียนทุกคน -มีความอดทน เสียสละ ใฝ่รู้ มีน้ำใจ		

คุณลักษณะ “อยู่อย่างพอเพียง”

พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
วางแผนในการทำงานรอบคอบเป็นระบบ และเตรียมอุปกรณ์การเรียนพร้อม	-มีความรู้ สามารถอธิบายการให้เหตุผลและสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาบางอย่างได้ - วิเคราะห์และเลือกวิธีที่สะดวกในการหาคำตอบ -มีความกระตือรือร้น สนใจเข้ากิจกรรม รู้จักการทำงานร่วมกับผู้อื่น	-ฝึกการทำงานโดยใช้ความคิดสร้างสรรค์ของตนเอง -สามารถใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และกระบวนการคิด -วิเคราะห์สาเหตุของการทำแบบฝึกหัดไม่ถูกต้องได้ด้วยตนเอง
ความรู้ (วิธีการ) - เรียนรู้จากแบบฝึกที่เป็นรูปธรรมไปหนามธรรม - เรียนรู้จากแบบฝึกง่ายไปหายาก - สามารถสรุปความคิดได้จากแบบฝึกหัด - ศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมได้จากแหล่งเรียนรู้ที่หลากหลาย ห้องสมุดกลุ่มสาระฯ ห้องสมุดโรงเรียน อินเทอร์เน็ต		
คุณธรรมที่เกิดกับนักเรียน - มีวินัย - ซื่อสัตย์สุจริต - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน - มีจิตสาธารณะ - มีความกระตือรือร้น		

3. ผลลัพธ์ KPA 4 มิติ ที่เกี่ยวข้องกับการอยู่อย่างพอเพียง

ผลลัพธ์	สมดุลและพร้อมต่อการเปลี่ยนแปลงในด้านต่าง ๆ			
	ด้านวัตถุ	ด้านสังคม	ด้านสิ่งแวดล้อม	ด้านวัฒนธรรม
ด้านความรู้	รู้จักกับการให้เหตุผล และสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา	มีความรู้ในการวางแผนการทำงาน		
ด้านทักษะ	สามารถอธิบาย การให้เหตุผล และนำไปใช้แก้ปัญหา	-สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้ -มีทักษะในการปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่นได้		
ด้านค่านิยม	เห็นคุณค่าของการให้เหตุผล	เห็นความสำคัญของการทำงานร่วมกับผู้อื่น		

10. บันทึกการจัดการเรียนรู้

ความคิดเห็นของผู้บริหาร

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ผู้อำนวยการ/รองผู้อำนวยการ/หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้

...../...../.....

บันทึกผลการสอน

1. ผลการสอน

.....

.....

.....

2. ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ

(นายสุเมธ จันทรมบัติ) ผู้สอน

...../...../.....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	ใบกิจกรรม	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 9.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 ชั่วโมงที่ 22 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	-----------	--

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่างแต่ละข้อต่อไปนี้ให้ถูกต้องสมบูรณ์

1. กำหนด $f(x) = x^2 + 2x - 1$ และ $g(x) = x^3 + 3$ จงหา

1.1 $(g \circ f)(2) = \dots\dots\dots$

1.2 $(f \circ g)(3) = \dots\dots\dots$

1.3 $(f \circ g)(-2) = \dots\dots\dots$

2. กำหนดให้ $f(x) = 2x + 5$ และ $g(x) = 2x - 3$ จงหา

2.1 $(g \circ f)(1) = \dots\dots\dots$

2.2 $(f \circ g)(5) = \dots\dots\dots$

3. กำหนดให้ $f(x) = 2^x$ และ $g(x) = 3^{-x}$ จงหา

3.1 $(g \circ f)(2) = \dots\dots\dots$

3.2 $(f \circ g)(-3) = \dots\dots\dots$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	ใบกิจกรรม	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 9.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 ชั่วโมงที่ 22 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	-----------	--

คำชี้แจง ให้นักเรียนหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ตามตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง ให้ $y = (x^2 + 1)^5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ให้ $u = x^2 + 1$

$$\therefore y = (x^2 + 1)^5 = u^5$$

ใช้กฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
 &= \frac{du^5}{du} \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + 1) \\
 &= 5u^4 (2x) \\
 &= 5(x^2 + 1)^4 (2x) \\
 &= 10x(x^2 + 1)^4
 \end{aligned}$$

1. ให้ $y = \sqrt{1 - 3x^2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ให้ $u = 1 - 3x^2$

$$\therefore y = \sqrt{1 - 3x^2} = (1 - 3x^2)^{\frac{1}{2}} = u^{\frac{1}{2}}$$

จากกฎลูกโซ่ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

3. ให้ $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x^2 - 1}}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ให้ $u = 2x^2 - 1$

$$\therefore y = \dots\dots\dots$$

จากกฎลูกโซ่ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

2. ให้ $f(x) = (3x - 1)^4$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ ให้ $u = \dots\dots\dots$

$$\therefore y = (3x - 1)^4 = u^4$$

จากกฎลูกโซ่ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

4. ให้ $y = (x^3 + 2x^2 + 1)^7$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ให้ $u = \dots\dots\dots$

$$\therefore y = \dots\dots\dots$$

จากกฎลูกโซ่ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 9 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 ชั่วโมงที่ 22-23 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	-------------	--

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	ให้ $y = (2x + 3)^5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
2	ให้ $y = (1 - 3x)^3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
3	ให้ $y = (3 - 4x^2)^4$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
4	ให้ $y = (2 - 3x + 4x^2)^3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
5	ให้ $y = (x^3 - 2x)^4$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
6	ให้ $y = \sqrt{1 - 2x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
7	ให้ $y = (1 - 5x)^6$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
8	ให้ $y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^6$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลย แบบฝึกหัดทักษะ ที่ 9

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	ให้ $y = (2x + 3)^5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	$10(2x + 3)^4$
2	ให้ $y = (1 - 3x)^3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	$-9(1 - 3x)^2$
3	ให้ $y = (3 - 4x^2)^4$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	$-32x(3 - 4x^2)^3$
4	ให้ $y = (2 - 3x + 4x^2)^3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	$(-9 + 24x)(2 - 3x + 4x^2)^2$
5	ให้ $y = (x^3 - 2x)^4$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	$(12x^2 - 8)(x^3 - 2x)^3$
6	ให้ $y = \sqrt{1 - 2x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - 2x}}$
7	ให้ $y = (1 - 5x)^6$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	$-30(1 - 5x)^5$
8	ให้ $y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^6$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	$\frac{5x^4}{(1+x)^6}$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบสรุปเนื้อหา	รหัส แบบสรุปเนื้อหาที่ 9 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 ชั่วโมงที่ 22-23 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	----------------	---

คำชี้แจง ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาจากเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 6.1-6.3 ตามหัวข้อต่อไปนี้

1. ฟังก์ชันคอมโพสิท คือ

.....

.....

.....

.....

2. กฎลูกโซ่ มีสูตรดังนี้

.....

.....

.....

.....

.....

3. ถ้าให้ $u = f(x)$ จะได้ $y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(u)$

นั่นคือ ถ้า $u = f(x)$ และ $y = g(u)$ แล้ว

$\frac{dy}{dx} =$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	ภาคเรียนที่ 1
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น	จำนวน 58 ชั่วโมง	
เรื่อง อนุพันธ์อันดับสูง	จำนวน 1 ชั่วโมง	
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/.....	วัน.....ที่	เดือน..... พ.ศ.
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/.....	วัน.....ที่	เดือน..... พ.ศ.

1. มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย ทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2. ตัวชี้วัด

ค 6.1 ม.6/1 ให้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

ค 6.1 ม.6/2 ให้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/3 ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/4 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

ค 6.1 ม.6/5 เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และนำความรู้ หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ

ค 6.1 ม.6/6 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

3. สาระสำคัญ

อนุพันธ์อันดับสูง

อนุพันธ์อันดับที่ n ของ $f(x)$ เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ $n - 1$ เช่น อนุพันธ์อันดับที่ 4 ของ $f(x)$ เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 3

4. จุดประสงค์การเรียนรู้ (K-P-A)

ด้านความรู้ (K): นักเรียนสามารถ

1) บอกความหมายของอนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชัน เมื่อ $n \in \mathbb{I}$ และ $n > 1$ ได้

2) หาอนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ เมื่อ $n \in \mathbb{I}$ และ $n > 1$ ได้

3) นำความรู้เรื่อง อนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชันไปใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ได้

ด้านทักษะและกระบวนการ (P) : นักเรียนเกิดทักษะดังนี้

1) มีการแก้ปัญหา

2) มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

3) มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : นักเรียนสามารถ

- 1) คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง
- 2) นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กะทัดรัด ชัดเจน และตรงประเด็น
- 3) ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย

5. สารการเรียนรู้

$$\text{ถ้าให้ } f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 2x + 3$$

$$\text{จะได้ } f'(x) = 5x^4 + 8x^3 + 9x^2 - 2$$

เราเรียก $f'(x)$ ว่าเป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ของ $f(x)$

ถ้าเรานำ $f'(x)$ มาหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $f'(x)$ ใหม่ว่าเป็นอนุพันธ์อันดับสอง ของ $f(x)$

$$\text{นั่นคือ } f''(x) = 20x^3 + 24x^2 + 18x$$

ในการทำนองเดียวกัน ถ้านำ $f''(x)$ มาหาอนุพันธ์ต่อไปเรื่อยๆ เราก็จะได้อนุพันธ์อันดับสาม อันดับสี่ต่อไปเรื่อยๆ และเพื่อสรุปเป็นหมวดหมู่ เรานิยมใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้แทนอนุพันธ์อันดับต่างๆ ดังนี้

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{แทน อนุพันธ์อันดับหนึ่ง}$$

$$f''(x) = y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{แทน อนุพันธ์อันดับสอง}$$

$$f'''(x) = y''' = \frac{d^3y}{dx^3} \quad \text{แทน อนุพันธ์อันดับสาม}$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} \quad \text{แทน อนุพันธ์อันดับที่ } n$$

6. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

6.1 แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ ว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ

- บอกความหมายของอนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชัน เมื่อ $n \in \mathbb{I}$ และ $n > 1$ ได้
- หาอนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ เมื่อ $n \in \mathbb{I}$ และ $n > 1$ ได้
- นำความรู้เรื่อง อนุพันธ์อันดับสูง ไปในการแก้ปัญหาโจทย์ได้

6.2 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์โดยใช้สูตร โดยใช้การถาม-ตอบ

ขั้นสอน

6.3 นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 10.1 โดยศึกษาตัวอย่างและเนื้อหา พิจารณาตัวอย่างให้ละเอียดแล้ว ร่วมกันสรุปวิธีการหาอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชัน โดยครูคอยอธิบายเพิ่มเติม ถ้ามีนักเรียนสงสัย หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 10

6.4 ครูให้นักเรียนอาสาหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันจากโจทย์ที่กำหนดให้บนกระดาน ดังนี้

$$1. \text{ จงหา } y''' \text{ เมื่อ } y = x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 5$$

$$2. \text{ จงหา } f'''(x) \text{ เมื่อ } f(x) = x^5 + 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 10$$

6.5 ครูชมเชยนักเรียนที่ได้ออกมาแสดงวิธีหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันให้เพื่อนดู พร้อมทั้งให้เพื่อนปรบมือให้กำลังใจ เพื่อเป็นการเสริมแรงในการเรียนรู้ของนักเรียน

6.6 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 10.1 เป็นการบ้านเพื่อเสริมทักษะและความแม่นยำในการเรียนรู้

6.7 ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 10.1 แล้วให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

ขั้นสรุป

6.8 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชัน และอัตราการเปลี่ยนแปลง โดยใช้การถาม-ตอบ

6.9 นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 10.2 โดยร่วมกันศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างให้ละเอียด หากมีปัญหาสงสัยให้สอบถามครูผู้สอน

6.10 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 10.2 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลยและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

6.11 นักเรียนแต่ละกลุ่มจัดทำบัตรคำถาม กลุ่มละ 10 บัตร เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์อันดับที่ n เมื่อ $n > 1$ กลุ่มละ 10 บัตร โดยกำหนดขนาดบัตรเอง โดยอิสระ เป็นผลงานของกลุ่ม ส่งครูผู้สอนนอกเวลาเรียน

7. สื่อ / แหล่งการเรียนรู้

7.1 ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

7.2 ห้องสมุดโรงเรียน

7.3 อินเทอร์เน็ต

8. การวัดและประเมินผล (K-P-A)

การวัดและประเมินผล จุดประสงค์	วิธีการวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
ความรู้ความเข้าใจ(K):นักเรียนสามารถบอกความหมายของอนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชัน เมื่อ $n \in \mathbb{I}$ และ $n > 1$ ได้ หาอนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชันที่กำหนดให้เมื่อ $n \in \mathbb{I}$ และ $n > 1$ ได้ นำความรู้เรื่องอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชันไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้	1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	1. แบบบันทึกการสังเกต 2. แบบฝึกหัด	นักเรียนทุกคนทำถูกต้องไม่ต่ำกว่าร้อยละ 70 ของคะแนนทั้งหมด
ด้านทักษะกระบวนการ(P): นักเรียนเกิดทักษะดังนี้ 1. มีการแก้ปัญหา 2. มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ 3. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะ(A):นักเรียนสามารถ 1. คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง 2. นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กะทัดรัด ชัดเจน และตรงประเด็น 3. ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป

เกณฑ์การวัดและประเมินผล

เกณฑ์การประเมินผลจากการทำกิจกรรม

ร้อยละ 80 ขึ้นไป หมายถึง ดีมาก

ร้อยละ 70-79 หมายถึง ดี

ร้อยละ 60-69 หมายถึง ปานกลาง

ร้อยละ 50-59 หมายถึง พอใช้

ต่ำกว่า ร้อยละ 50 หมายถึง ปรับปรุง

ผ่านการประเมินตั้งแต่ ร้อยละ ขึ้นไป

9. บูรณาการหลักเศรษฐกิจพอเพียง

1. ผู้สอนใช้หลักเศรษฐกิจพอเพียงในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ประเด็น \ ปศพ	พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
กิจกรรมการเรียนรู้	ก่อนการจัดกิจกรรมมีการวางแผนการเรียนรู้ชัดเจน เป็นลำดับขั้นตอน มีการกำหนดเนื้อหาสาระและกระบวนการเหมาะสมกับนักเรียน ชั้น ม.6	จัดการเรียนรู้ตรงมาตรฐาน ตัวชี้วัดของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มาตรฐานตัวชี้วัด ค 1.1	มีการวางแผนการจัดกิจกรรมที่ชัดเจน เป็นขั้นตอน จากง่ายไปยาก จากรูปธรรมไปหานามธรรม
เวลา	กำหนดเนื้อหาสาระตามมาตรฐาน ตัวชี้วัด ค 5.3 เพื่อให้เหมาะสมกับเวลาเรียน 2 ชั่วโมง นักเรียนทำกิจกรรมตามแผนการจัดการเรียนรู้ได้ทันตามเวลา	กิจกรรมการเรียนรู้บรรลุ ตัวชี้วัดได้ตามเวลาที่กำหนด	มีการถามตอบ ทำให้นักเรียนเข้าใจและทำงานอย่างมีความสุข
สื่อ	จัดเตรียมและใช้สื่อในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ มีแบบฝึกหัดเพียงพอกับนักเรียน	นักเรียนได้เรียนรู้จากง่ายไปหายากและเรียนรู้ด้วยความสุข	สื่อแบบฝึกหัดน่าสนใจและคุ้มค่า
แหล่งเรียนรู้	แหล่งเรียนรู้ที่ใช้เหมาะสมกับเนื้อหาสาระและกิจกรรม	นักเรียนใช้เป็นต้นแบบความคิดและปรับปรุงเป็นของตนเอง สะดวก ใช้งาน	-จัดห้องสื่อทันสมัย -สำรวจข้อมูลจากห้องสมุด -สำรวจข้อมูลจากอินเทอร์เน็ต
ความรู้ที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	-เทคนิควิธีการสอน รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ -ศึกษารูปแบบของแบบฝึก -วิเคราะห์และจัดทำเครื่องมือการวัดและประเมินผล -ศึกษา ค้นคว้าและนำหลักของปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียงมาบูรณาการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้		
คุณธรรม	-มีความรับผิดชอบในการปฏิบัติการสอน เข้าสอนตรงเวลา ปฏิบัติการสอนเต็มเวลา เต็มความสามารถ มีการเตรียมการสอน สื่อและแบบฝึกหัดไว้ล่วงหน้า -มีเมตตา ให้ความเสมอภาคและยุติธรรมกับนักเรียนทุกคน -มีความอดทน เสียสละ ใฝ่รู้ มีน้ำใจ		

คุณลักษณะ “อยู่อย่างพอเพียง”

พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
วางแผนในการทำงานรอบคอบเป็นระบบ และเตรียมอุปกรณ์การเรียนพร้อม	-มีความรู้ สามารถอธิบายการให้เหตุผลและสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาบางอย่างได้ - วิเคราะห์และเลือกวิธีที่สะดวกในการหาคำตอบ -มีความกระตือรือร้น สนใจเข้ากิจกรรม รู้จักการทำงานร่วมกับผู้อื่น	-ฝึกการทำงานโดยใช้ความคิดสร้างสรรค์ของตนเอง -สามารถใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และกระบวนการคิด -วิเคราะห์สาเหตุของการทำแบบฝึกหัดไม่ถูกต้องได้ด้วยตนเอง
ความรู้ (วิธีการ) - เรียนรู้จากแบบฝึกที่เป็นรูปธรรมไปหนามธรรม - เรียนรู้จากแบบฝึกง่ายไปหายาก - สามารถสรุปความคิดได้จากแบบฝึกหัด - ศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมได้จากแหล่งเรียนรู้ที่หลากหลาย ห้องสมุดกลุ่มสาระฯ ห้องสมุดโรงเรียน อินเทอร์เน็ต		
คุณธรรมที่เกิดกับนักเรียน - มีวินัย - ซื่อสัตย์สุจริต - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน - มีจิตสาธารณะ - มีความกระตือรือร้น		

3. ผลลัพธ์ KPA 4 มิติ ที่เกี่ยวข้องกับการอยู่อย่างพอเพียง

ผลลัพธ์	สมดุลและพร้อมต่อการเปลี่ยนแปลงในด้านต่าง ๆ			
	ด้านวัตถุ	ด้านสังคม	ด้านสิ่งแวดล้อม	ด้านวัฒนธรรม
ด้านความรู้	รู้จักกับการให้เหตุผล และสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา	มีความรู้ในการวางแผนการทำงาน		
ด้านทักษะ	สามารถอธิบาย การให้เหตุผล และนำไปใช้แก้ปัญหา	-สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้ -มีทักษะในการปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่นได้		
ด้านค่านิยม	เห็นคุณค่าของการให้เหตุผล	เห็นความสำคัญของการทำงานร่วมกับผู้อื่น		

10. บันทึกการจัดการเรียนรู้

ความคิดเห็นของผู้บริหาร

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ผู้อำนวยการ/รองผู้อำนวยการ/หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้

...../...../.....

บันทึกผลการสอน

1. ผลการสอน

.....

.....

.....

2. ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ

(นายสุเมธ จันทรมบัติ) ผู้สอน

...../...../.....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 10.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10 ชั่วโมงที่ 24 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	--------------------	--

จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 บอกความหมายของอนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชัน เมื่อ $n \in \mathbb{I}$ และ $n > 1$ ได้

1.2 หาอนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชันที่กำหนดให้เมื่อ $n \in \mathbb{I}$ และ $n > 1$ ได้

สาระสำคัญ

อนุพันธ์อันดับที่ n ของ $f(x)$ เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ $n - 1$ เช่น อนุพันธ์อันดับที่ 4 ของ $f(x)$ เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 3

สาระการเรียนรู้

อนุพันธ์อันดับสูง

ถ้าให้ $f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 2x + 3$ จะได้ $f'(x) = 5x^4 + 8x^3 + 9x^2 - 2$

เราเรียก $f'(x)$ ว่า อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $f(x)$

ถ้าเรา นำ $f'(x)$ มาหาอนุพันธ์จากอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $f(x)$ อนุพันธ์ที่ได้จะเป็นอนุพันธ์อันดับสองของ $f(x)$ นั่นคือ $f''(x) = 20x^3 + 24x^2 + 18x$

ในการทำงานกัน ถ้านำ $f''(x)$ มาหาอนุพันธ์ต่อไปเรื่อยๆ เราก็จะได้อนุพันธ์อันดับสาม อันดับสี่ ต่อไปเรื่อยๆ และเพื่อสรุปเป็นหมวดหมู่ เรานิยามใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้แทนอนุพันธ์อันดับต่างๆ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= y' = \frac{dy}{dx} && \text{แทน อนุพันธ์อันดับหนึ่ง} \\
 f''(x) &= y'' = \frac{d^2y}{dx^2} && \text{แทน อนุพันธ์อันดับสอง} \\
 f'''(x) &= y''' = \frac{d^3y}{dx^3} && \text{แทน อนุพันธ์อันดับสาม} \\
 &\vdots && \\
 f^{(n)}(x) &= y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} && \text{แทน อนุพันธ์อันดับที่ } n
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 2x - 10$ จงหา $f'''(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 2x - 10$

$$\therefore f'(x) = 9x^2 + 12x + 2$$

$$f''(x) = 18x + 12$$

$$f'''(x) = 18$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $y = 3x^5 + 4x^2 + 8x + 2$ จงหา $\frac{d^4y}{dx^4}$

วิธีทำ จาก $y = 3x^5 + 4x^2 + 8x + 2$

$$\frac{dy}{dx} = 15x^4 + 8x + 8$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 60x^3 + 8$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 180x^2$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 360x$$

ตอบ

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 10.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10 ชั่วโมงที่ 24 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	-------------	---

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.2

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	ให้ $y = x^{\frac{5}{2}} + 4x^3 - 5x + 7$ จงหา $\frac{d^3y}{dx^3}$	
2	ให้ $y = \sqrt[3]{x} - 5x^6 + 8$ จงหา $\frac{d^3y}{dx^3}$	
3	ให้ $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - x + 2$ จงหา $f^{(IV)}(x)$	
4	ให้ $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + x - 2$ จงหา $f^{(V)}(x)$	
5	ให้ $f(x) = 6 + 3x + 8x^3 - 2x^5$ จงหา $f'''(x)$	
6	ให้ $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 7$ จงหา $f''(1)$	
7	ให้ $f(x) = 5x^5 - 6x^3 + 13$ จงหา $f'''(2)$	
8	ให้ $f(x) = 4x^4 + 3x^3 + 6x^2 - 10$ จงหา $f'''(3)$	

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลย แบบฝึกทักษะ

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	ให้ $y = x^{\frac{5}{2}} + 4x^3 - 5x + 7$ จงหา $\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{15}{8\sqrt{x}} + 24$
2	ให้ $y = \sqrt[3]{x} - 5x^6 + 8$ จงหา $\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}} - 600x^3$
3	ให้ $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - x + 2$ จงหา $f^{(IV)}(x)$	120
4	ให้ $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + x - 2$ จงหา $f^{(V)}(x)$	240
5	ให้ $f(x) = 6 + 3x + 8x^3 - 2x^5$ จงหา $f'''(x)$	$48 - 120x^2$
6	ให้ $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 7$ จงหา $f''(1)$	18
7	ให้ $f(x) = 5x^5 - 6x^3 + 13$ จงหา $f'''(2)$	1,164
8	ให้ $f(x) = 4x^4 + 3x^3 + 6x^2 - 10$ จงหา $f'''(3)$	474

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 10.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10 ชั่วโมงที่ 24 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	--------------------	--

จุดประสงค์การเรียนรู้

1.3 นำความรู้เรื่องอนุพันธ์อันดับสูงไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้

สาระสำคัญ

อัตราการเปลี่ยนแปลงของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x เทียบกับ x ใดๆ ก็คือ การหาอนุพันธ์อันดับสอง ซึ่งสามารถนำมาใช้ในเรื่องการเคลื่อนที่และในการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นสัมผัสโค้ง ขณะที่ x มีค่าใดๆ ได้

สาระการเรียนรู้

โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์อันดับสูง

ตัวอย่างที่ 1 เมื่อเวลา t วินาที วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $S = 4t^3 + 2t - 3$ เมตร

- จงหา 1) ความเร็วขณะเวลา t ใดๆ
2) ความเร่งขณะเวลา t ใดๆ
3) ความเร่งขณะเวลา $t = 2$ วินาที

วิธีทำ 1) จาก $S = 4t^3 + 2t - 3$

$$\text{จะได้ } v = \frac{dS}{dt} = 12t^2 + 2 \text{ เมตร/วินาที}$$

$\therefore$ ความเร็วขณะเวลา t ใดๆ เท่ากับ $12t^2 + 2$ เมตร/วินาที ตอบ

$$2) \text{ จาก } v = \frac{dS}{dt} = 12t^2 + 2$$

$$\text{จะได้ } a = \frac{dv}{dt} = 24t \text{ เมตร/วินาที}$$

$\therefore$ ความเร่งขณะเวลา t ใดๆ เท่ากับ $24t$ เมตร/วินาที ตอบ

$$3) \text{ จาก 2) จะได้ความเร่งขณะเวลา } t = 2 \text{ วินาที เท่ากับ } 24(2) \\ = 48 \text{ เมตร/วินาที}^2 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชัน ขณะที่

$x = 2$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$\text{ให้ } x = 2 \text{ จะได้ } f''(2) = 6(2) - 4 = 8$$

นั่นคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นสัมผัสของกราฟที่ $x = 2$ เท่ากับ 8 ตอบ

สรุป

ความเร่ง (a) ของวัตถุขณะเวลา t ใดๆ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว (v) เทียบกับเวลา t ใดๆ ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ตามสมการเคลื่อนที่ คือ $S = f(t)$ เมื่อ S คือระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในเวลา t จะได้

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{และ} \quad v = \frac{dS}{dt}$$

$$\therefore a = \frac{d}{dt} \left(\frac{dS}{dt} \right) = \frac{d^2S}{dt^2}$$

นั่น คือ ความเร่งขณะเวลา t ใดๆ ก็คือ อนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ $S = f(t)$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 10.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10 ชั่วโมงที่ 25 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	-------------	---

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ได้ทาง $S = 2t^2 - 5t - 3$ ในเวลา t วินาที จงหาความเร็วและความเร่งขณะ $t = 4$	
2	โยนลูกบอลลูกหนึ่งขึ้นไปในอากาศ มีสมการของการเคลื่อนที่คือ $S(t) = 88t - 2t^2$ จงหาความเร็วในขณะที่ยังลูกบอลถูกโยนไปได้ 10 วินาที	
3	ปล่อยวัตถุจากที่สูงลงสู่พื้นดิน วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $S(t) = 16t^2$ เมตร ในเวลา t วินาที จงหาความเร็วขณะเวลา $t = 2$ วินาที และความเร่ง ขณะเวลา $t = 5$ วินาที	
4	โยนวัตถุขึ้นไปในอากาศ วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $S = 128t - 16t^2$ เมตร ในเวลา t วินาที จงหาความเร่งของวัตถุ ขณะเวลา $t = 2$ วินาที	
5	จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่ $x = 2$ เมื่อ $f(x) = 4x^4 - x^3 - 5x + 1$	

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลย แบบฝึกทักษะ ที่ 10.2

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ได้ทาง $S = 2t^2 - 5t - 3$ ในเวลา t วินาที จงหาความเร็วและความเร่งขณะ $t = 4$	ความเร็ว 11 เมตรต่อวินาที ความเร่ง 4 เมตรต่อวินาที ²
2	โยนลูกบอลลูกหนึ่งขึ้นไปในอากาศ มีสมการของการเคลื่อนที่คือ $S(t) = 88t - 2t^2$ จงหาความเร็วในขณะที่ยูกบอลถูกโยนไปได้ 10 วินาที	48 เมตรต่อวินาที
3	ปล่อยวัตถุจากที่สูงลงสู่พื้นดิน วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $S(t) = 16t^2$ เมตร ในเวลา t วินาที จงหาความเร็วขณะเวลา $t = 2$ วินาที และความเร่ง ขณะเวลา $t = 5$ วินาที	ความเร็ว 64 เมตรต่อวินาที ความเร่ง 32 เมตร/วินาที ²
4	โยนวัตถุขึ้นไปในอากาศ วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $S = 128t - 16t^2$ เมตร ในเวลา t วินาที จงหาความเร่งของวัตถุ ขณะเวลา $t = 2$ วินาที	ความเร่ง เท่ากับ 32 เมตร/วินาที ²
5	จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่ $x = 2$ เมื่อ $f(x) = 4x^4 - x^3 - 5x + 1$	180

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบสรุปเนื้อหา	รหัส แบบสรุปเนื้อหาที่ 10.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10 ชั่วโมงที่ 25 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	----------------	--

คำชี้แจง ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาจากเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 8.1-8.2 ตามหัวข้อต่อไปนี้

1. อนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชัน หมายถึง

.....

.....

.....

2. สัญลักษณ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 2 คือ

.....

3. สัญลักษณ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 3 คือ

.....

4. สัญลักษณ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 5 คือ

.....

5. ความเร็ว ขณะเวลา t ใดๆ คือ

.....

5. ความเร่ง ขณะเวลา t ใดๆ คือ

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น

จำนวน 58 ชั่วโมง

เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

จำนวน 8 ชั่วโมง

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

1. มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย ทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2. ตัวชี้วัด

ค 6.1 ม.6/1 ให้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

ค 6.1 ม.6/2 ให้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/3 ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/4 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

ค 6.1 ม.6/5 เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และนำความรู้ หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ

ค 6.1 ม.6/6 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

3. สาระสำคัญ

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีกราฟต่อเนื่องในช่วงเปิด (a, b) ถ้า $f'(x) > 0$ เรียก ฟังก์ชันเพิ่ม และ $f'(x) < 0$ เรียก ฟังก์ชันลด

ค่าของ $f'(x)$ เปลี่ยนจากบวกเป็นลบ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และ ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากลบเป็นบวก จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ ค่าของฟังก์ชันที่มีค่าน้อยที่สุดและมากที่สุดในช่วง $[a, b]$ เมื่อ ฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$

4. จุดประสงค์การเรียนรู้ (K-P-A)

ด้านความรู้ (K): นักเรียนสามารถ

- 1) บอกทฤษฎีบทเกี่ยวกับฟังก์ชันลดและฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงใดๆ และนำไปใช้ได้
- 2) บอกความหมายและหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันได้
- 3) หาค่าวิกฤตและจุดวิกฤตของฟังก์ชันได้
- 4) หาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

5) นำความรู้เกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ การหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์ได้
ด้านทักษะและกระบวนการ (P) : นักเรียนเกิดทักษะดังนี้

- 1) มีการแก้ปัญหา
- 2) มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ
- 3) มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : นักเรียนสามารถ

- 1) คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง
- 2) นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กระตือรือร้น ชัดเจน และตรงประเด็น
- 3) ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย

5. สารการเรียนรู้

โดยทั่วไป ฟังก์ชันใดๆ จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด จะต้องมีลักษณะดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ให้ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และสามารถหาอนุพันธ์ของ f ได้ทุกๆ จุดในช่วงเปิด (a, b)

- 1) ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุกๆ x บนช่วงเปิด (a, b) แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a, b]$
- 2) ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุกๆ x บนช่วงเปิด (a, b) แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[a, b]$

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน นิยามได้ดังนี้

บทนิยาม ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ ถ้ามีช่วง $(a, b) \subset D_f$ และ $c \in (a, b)$ โดยที่ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (a, b) ที่ $x \neq c$

ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ ถ้ามีช่วง $(a, b) \subset D_f$ และ $c \in (a, b)$ โดยที่ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (a, b) ที่ $x \neq c$

นอกจากที่เราสามารถใช้อนุพันธ์ อันดับที่ 2 ช่วยในการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง S ใดๆ และ c เป็นค่าวิกฤตของ f ซึ่ง $f'(c) = 0$

วิธีการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ มีขั้นตอนดังนี้

จากฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่โจทย์กำหนดให้

1. หา $f'(x)$
2. ให้ $f'(x) = 0$

หาค่า x ที่ทำให้ สมการนั้นเป็นจริง

ซึ่งค่า x ที่ได้เรียกว่า ค่าวิกฤต

3. นำค่าวิกฤตไปตรวจสอบ ซึ่งมีวิธีตรวจสอบ 2 วิธี คือ

3.1 ตรวจสอบโดยพิจารณาจากความชันของเส้นสัมผัส

- ถ้าความชันเปลี่ยนจากบวกไปเป็นลบ จะให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์
- ถ้าความชันเปลี่ยนจากลบไปเป็นบวก จะให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

3.2 ตรวจสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่ 2 ดังนี้

- ถ้า $f''(x) > 0$ จะให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
- ถ้า $f''(x) < 0$ จะให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์
- ถ้า $f''(0) = 0$ แสดงว่าตรวจสอบวิธีนี้ได้ ต้องตรวจสอบโดยวิธีตรวจสอบจากความชันของเส้นสัมผัส

6. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

6.1 แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ ว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ

- บอกทฤษฎีบทเกี่ยวกับฟังก์ชันลดและฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงใดๆ และนำไปใช้ได้
- บอกความหมายและหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันได้
- หาค่าวิกฤตและจุดวิกฤตของฟังก์ชันได้
- หาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
- นำความรู้เกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์การหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ได้

6.2 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์โดยใช้สูตร โดยใช้การถาม-ตอบ

ขั้นสอน

6.3 นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 11.1 แล้วร่วมกันสรุปความหมายของฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด โดยครูคอยชี้แนะแนวทางจนกว่านักเรียนสามารถสรุปได้ หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 11

6.4 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.1 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลยและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

6.5 ครูชมเชยนักเรียนที่ได้ทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.1 ได้ตั้งแต่ 70% ขึ้นไป เพื่อเป็นการเสริมแรงในการเรียนรู้ของนักเรียน

6.6 ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.1 ข้อที่นักเรียนส่วนใหญ่ทำผิดบนกระดาน เพื่อให้นักเรียนได้เห็นข้อบกพร่องของตนเองและนำไปแก้ไขปรับปรุงให้ดีขึ้น

6.7 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดบนช่วงใดๆ โดยใช้การถาม-ตอบ

6.8 นักเรียนจับคู่กันศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 11.2 แล้วร่วมกันสรุปวิธีการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยครูคอยชี้แนะแนวทางจนกว่านักเรียนสามารถสรุปได้ หลังจากนั้น บันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 11

6.9 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.2 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลยและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

6.10 นักเรียนแต่ละกลุ่มจัดทำเอกสารเสริมความรู้ เรื่องการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน เป็นผลงานของกลุ่มส่งครูผู้สอนนอกเวลาเรียน

6.11 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยใช้การถาม-ตอบ

6.12 นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 11.3 แล้วร่วมกันสรุปวิธีการหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ โดยครูคอยชี้แนะแนวทางจนกว่านักเรียนสามารถสรุปได้ หลังจากนั้น บันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 11

6.13 ครูเขียนโจทย์การหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ บนกระดาน แล้วให้นักเรียนช่วยกันหาคำตอบ เพื่อเป็นการตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนอีกครั้ง

6.14 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.3 เป็นการบ้านเพื่อเสริมทักษะและความแม่นยำในการเรียนรู้

6.15 ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.3 แล้วให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

6.16 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยใช้การถาม-ตอบ

ขั้นสรุป

6.17 นักเรียนดูแผ่นโปสเตอร์ รหัสที่ 11.1-11.2 แล้วเขียนผลการเรียนรู้ลงในแบบสรุปผลการเรียนจากแผ่นโปสเตอร์ โดยมีครูอธิบายและแนะนำ

6.18 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.4 แล้วเปลี่ยนกันตรวจสอบตามแผนภูมิเฉลยและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

6.19 นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ เพื่อประเมินความก้าวหน้าหลังจากเรียนจบหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 (แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5-11)

6.20 นักเรียนแต่ละกลุ่มจัดทำ Mind Map เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน เป็นผลงานของกลุ่ม ส่งครูนอกเวลาเรียน

7. สื่อ / แหล่งการเรียนรู้

7.1 ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

7.2 ห้องสมุดโรงเรียน

7.3 อินเทอร์เน็ต

8. การวัดและประเมินผล (K-P-A)

จุดประสงค์ \ การวัดและประเมินผล	วิธีการวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
ความรู้ความเข้าใจ(K):นักเรียนสามารถบอกทฤษฎีบทเกี่ยวกับฟังก์ชันลดและฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงใดๆ และนำไปใช้ได้ บอกความหมายและหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันได้ หาค่าวิกฤตและจุดวิกฤตของฟังก์ชันได้ หาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ นำความรู้เกี่ยวกับบอณัพันธ์ของฟังก์ชันไปใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ การหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์ได้	1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	1. แบบบันทึกการสังเกต 2. แบบฝึกหัด	นักเรียนทุกคนทำถูกต้องไม่ต่ำกว่าร้อยละ 70 ของคะแนนทั้งหมด
ด้านทักษะกระบวนการ(P): นักเรียนเกิดทักษะดังนี้ 1. มีการแก้ปัญหา 2. มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ 3. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะ(A):นักเรียนสามารถ 1. คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง 2. นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กะทัดรัด ชัดเจน และตรงประเด็น 3. ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป

เกณฑ์การวัดและประเมินผล

เกณฑ์การประเมินผลจากการทำกิจกรรม

ร้อยละ 80 ขึ้นไป หมายถึง ดีมาก

ร้อยละ 70-79 หมายถึง ดี

ร้อยละ 60-69 หมายถึง ปานกลาง

ร้อยละ 50-59 หมายถึง พอใช้

ต่ำกว่า ร้อยละ 50 หมายถึง ปรับปรุง

ผ่านการประเมินตั้งแต่ ร้อยละ ขึ้นไป

9. บูรณาการหลักเศรษฐกิจพอเพียง

1. ผู้สอนใช้หลักเศรษฐกิจพอเพียงในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ประเด็น \ ปศพ	พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
กิจกรรมการเรียนรู้	ก่อนการจัดกิจกรรมมีการวางแผนการเรียนรู้ชัดเจน เป็นลำดับขั้นตอน มีการกำหนดเนื้อหาสาระและกระบวนการเหมาะสมกับนักเรียน ชั้น ม.6	จัดการเรียนรู้ตรงมาตรฐาน ตัวชี้วัดของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 มาตรฐานตัวชี้วัด ค 1.1	มีการวางแผนการจัดกิจกรรมที่ชัดเจน เป็นขั้นตอน จากง่ายไปยาก จากรูปธรรมไปหานามธรรม
เวลา	กำหนดเนื้อหาสาระตามมาตรฐาน ตัวชี้วัด ค 5.3 เพื่อให้เหมาะสมกับเวลาเรียน 2 ชั่วโมง นักเรียนทำกิจกรรมตามแผนการจัดการเรียนรู้ได้ทันตามเวลา	กิจกรรมการเรียนรู้บรรลุ ตัวชี้วัดได้ตามเวลาที่กำหนด	มีการถามตอบ ทำให้นักเรียนเข้าใจและทำงานอย่างมีความสุข
สื่อ	จัดเตรียมและใช้สื่อในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ มีแบบฝึกหัดเพียงพอกับนักเรียน	นักเรียนได้เรียนรู้จากง่ายไปหายากและเรียนรู้ด้วยความสุข	สื่อแบบฝึกหัดน่าสนใจและคุ้มค่า
แหล่งเรียนรู้	แหล่งเรียนรู้ที่ใช้เหมาะสมกับเนื้อหาสาระและกิจกรรม	นักเรียนใช้เป็นต้นแบบความคิดและปรับปรุงเป็นของตนเอง สะดวก ใช้งาน	-จัดห้องสื่อทันสมัย -สำรวจข้อมูลจากห้องสมุด -สำรวจข้อมูลจากอินเทอร์เน็ต
ความรู้ที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	-เทคนิควิธีการสอน รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ -ศึกษารูปแบบของแบบฝึก -วิเคราะห์และจัดทำเครื่องมือการวัดและประเมินผล -ศึกษา ค้นคว้าและนำหลักของปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียงมาบูรณาการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้		
คุณธรรม	-มีความรับผิดชอบในการปฏิบัติการสอน เข้าสอนตรงเวลา ปฏิบัติการสอนเต็มเวลา เต็มความสามารถ มีการเตรียมการสอน สื่อและแบบฝึกหัดไว้ล่วงหน้า -มีเมตตา ให้ความเสมอภาคและยุติธรรมกับนักเรียนทุกคน -มีความอดทน เสียสละ ใฝ่รู้ มีน้ำใจ		

คุณลักษณะ “อยู่อย่างพอเพียง”

พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
วางแผนในการทำงานรอบคอบเป็นระบบ และเตรียมอุปกรณ์การเรียนพร้อม	-มีความรู้ สามารถอธิบายการให้เหตุผลและสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาบางอย่างได้ - วิเคราะห์และเลือกวิธีที่สะดวกในการหาคำตอบ -มีความกระตือรือร้น สนใจเข้ากิจกรรม รู้จักการทำงานร่วมกับผู้อื่น	-ฝึกการทำงานโดยใช้ความคิดสร้างสรรค์ของตนเอง -สามารถใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และกระบวนการคิด -วิเคราะห์สาเหตุของการทำแบบฝึกหัดไม่ถูกต้องได้ด้วยตนเอง
ความรู้ (วิธีการ) - เรียนรู้จากแบบฝึกที่เป็นรูปธรรมไปหนามธรรม - เรียนรู้จากแบบฝึกง่ายไปหายาก - สามารถสรุปความคิดได้จากแบบฝึกหัด - ศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมได้จากแหล่งเรียนรู้ที่หลากหลาย ห้องสมุดกลุ่มสาระฯ ห้องสมุดโรงเรียน อินเทอร์เน็ต		
คุณธรรมที่เกิดกับนักเรียน - มีวินัย - ซื่อสัตย์สุจริต - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน - มีจิตสาธารณะ - มีความกระตือรือร้น		

3. ผลลัพธ์ KPA 4 มิติ ที่เกี่ยวข้องกับการอยู่อย่างพอเพียง

ผลลัพธ์	สมดุลและพร้อมต่อการเปลี่ยนแปลงในด้านต่าง ๆ			
	ด้านวัตถุ	ด้านสังคม	ด้านสิ่งแวดล้อม	ด้านวัฒนธรรม
ด้านความรู้	รู้จักกับการให้เหตุผล และสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา	มีความรู้ในการวางแผนการทำงาน		
ด้านทักษะ	สามารถอธิบาย การให้เหตุผล และนำไปใช้แก้ปัญหา	-สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้ -มีทักษะในการปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่นได้		
ด้านค่านิยม	เห็นคุณค่าของการให้เหตุผล	เห็นความสำคัญของการทำงานร่วมกับผู้อื่น		

10. บันทึกการจัดการเรียนรู้

ความคิดเห็นของผู้บริหาร

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ผู้อำนวยการ/รองผู้อำนวยการ/หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้

...../...../.....

บันทึกผลการสอน

1. ผลการสอน

.....

.....

.....

2. ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ

(นายสุเมธ จันทร์สมบัติ) ผู้สอน

...../...../.....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 11.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 ชั่วโมงที่ 26 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	--------------------	--

จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 บอกทฤษฎีบทเกี่ยวกับฟังก์ชันลดและฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงใดๆ และนำไปใช้ได้

สาระสำคัญ

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีกราฟต่อเนื่องในช่วงเปิด (a, b) ถ้า $f'(x) > 0$ เรียกว่า ฟังก์ชันเพิ่ม และ $f'(x) < 0$ เรียกว่า ฟังก์ชันลด

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด

โดยทั่วไปฟังก์ชันใดๆ จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด จะต้องมิลักษณะดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท

ให้ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และสามารถหาอนุพันธ์ ของ f ได้ทุกๆ จุดในช่วงเปิด (a, b)

- 1) ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุกๆ x บนช่วงเปิด (a, b) แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a, b]$
- 2) ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุกๆ x บนช่วงเปิด (a, b) แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[a, b]$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$ จงหา

1. ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันลด
2. ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันพหุนาม

ดังนั้น f มีความต่อเนื่องทุกค่าของ x ที่เป็นจำนวนจริง

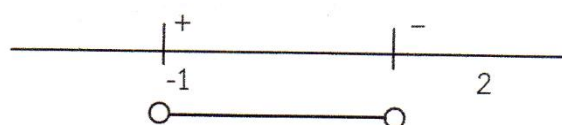
$$\text{จาก } f'(x) = x^2 - x - 2$$

- 1) เนื่องจากค่า x ที่จะทำให้ f เป็นฟังก์ชันลด คือ ค่า x ที่ทำให้ $f'(x)$ เป็นจำนวนลบ

$$\text{นั่นคือ } f'(x) < 0$$

$$x^2 - x - 2 < 0$$

$$(x - 2)(x + 1) < 0$$



จาก กราฟช่วงที่ทำให้ $f'(x) < 0$ คือ $(-1, 2)$

∴ ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันลด คือ $(-1, 2)$

ตอบ

2) เนื่องจากค่า x ที่จะทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม คือ ค่า x ที่ทำให้ $f'(x)$ เป็นจำนวนบวก

$$\text{นั่นคือ } f'(x) > 0$$

$$x^2 - x - 2 > 0$$

$$(x - 2)(x + 1) > 0$$



จากกราฟช่วงที่ทำให้ $f' > 0$ คือ $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

$\therefore$ ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม คือ $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาช่วงที่ทำให้ $f(x) = x^3 - 3x + 2$ เป็นฟังก์ชันลด

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 3$$

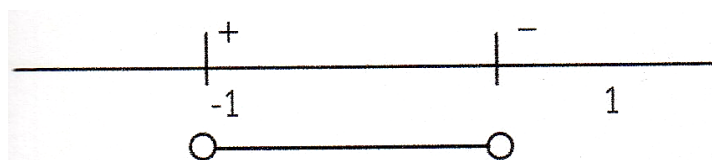
พิจารณา ค่า x ที่ทำให้ $f'(x) < 0$

$$3x^2 - 3 < 0$$

$$3(x^2 - 1) < 0$$

$$(x^2 - 1) < 0$$

$$(x - 1)(x + 1) < 0$$



จากกราฟ จะพบว่าช่วงที่ทำให้ $3x^2 - 3 < 0$ คือ $(-1, 1)$

$\therefore$ ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันลด คือ $(-1, 1)$

ตอบ

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 11.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 ชั่วโมงที่ 26 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	-------------	---

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.1

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
	จงหาช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันลด จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จาก ข้อ 1 - 5	
1	$f(x) = x^2 - 4x + 8$	
2	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 3$	
3	$f(x) = 2 + 2x - x^2$	
4	$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 6$	
5	$f(x) = x^3 + 3x - 4$	

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลย แบบฝึกทักษะ

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
	จงหาช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันลด จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จาก ข้อ 1 - 5	
1	$f(x) = x^2 - 4x + 8$	ช่วง $[2, \infty)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ช่วง $(-\infty, 2]$ เป็นฟังก์ชันลด
2	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 3$	ช่วง $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ช่วง $[-1, 3]$ เป็นฟังก์ชันลด
3	$f(x) = 2 + 2x - x^2$	ช่วง $(-\infty, 1]$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ช่วง $[1, \infty)$ เป็นฟังก์ชันลด
4	$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 6$	ช่วง $[-1, 1] \cup [2, \infty)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ช่วง $(-\infty, -1] \cup [1, 2]$ เป็นฟังก์ชันลด
5	$f(x) = x^3 + 3x - 4$	เป็นฟังก์ชันเพิ่มตลอดช่วง $(-\infty, \infty)$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 11.3 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 ชั่วโมงที่ 28 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	--------------------	--

จุดประสงค์การเรียนรู้

1.4 หาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

สาระสำคัญ

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ ค่าของฟังก์ชันที่มีค่าน้อยที่สุด และมากที่สุดในช่วง $[a, b]$ เมื่อฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$

สาระการเรียนรู้

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน นิยามได้ดังนี้

บทนิยาม ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = c$ ถ้า $f(c) > f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของ f ที่ $x \neq c$

ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = c$ ถ้า $f(c) < f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของ f ที่ $x \neq c$

ตัวอย่างที่ 1 ให้ $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 1$ เป็นฟังก์ชันบนช่วงปิด $[-4, 2]$ จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน

วิธีทำ ขั้นที่ 1 หาค่าวิกฤตของฟังก์ชัน

$$\text{จาก } f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 1$$

$$\text{จะได้ } f'(x) = 3x^2 + 2x - 8$$

$$\text{ให้ } f'(x) = 0$$

$$\therefore 3x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(3x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = \frac{4}{3}, -2$$

ค่าวิกฤต คือ $x = \frac{4}{3}$ และ $x = -2$

$$\begin{aligned} \therefore f\left(\frac{4}{3}\right) &= \left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{4}{3}\right) - 1 \\ &= -\frac{203}{27} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(-2) &= (-2)^3 + (-2)^2 - 8(-2) - 1 \\ &= 11 \end{aligned}$$

ขั้นที่ 2 เนื่องจากจุดปลายของช่วงเปิด $[-4, 2]$ คือ $x = -4$ และ $x = 2$

$$\begin{aligned} \therefore f(-4) &= (-4)^3 + (-4)^2 - 8(-4) - 1 \\ &= -17 \end{aligned}$$

$$f(2) = (2)^3 + (2)^2 - 8(2) - 1$$

$$= -5$$

ขั้นที่ 3 นำค่าของ $f\left(\frac{4}{3}\right), f(-2), f(-4)$ และ $f(2)$ มาเปรียบเทียบกัน

จะได้ $f(-2) = 11$ มีค่ามากที่สุด

$f(-4) = -17$ มีค่าน้อยที่สุด

$\therefore \left. \begin{array}{l} \text{ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ จะมีค่าเท่ากับ } 11 \\ \text{ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ จะมีค่าเท่ากับ } -17 \end{array} \right\} \text{ตอบ}$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ เป็นฟังก์ชันบนช่วง $[0, 5]$ จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

วิธีทำ จาก $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

จะพบว่า ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0, 5]$

จะได้ $f'(x) = -2x + 4$

ให้ $f'(x) = 0$

$$\therefore -2x + 4 = 0$$

$$\therefore x = 2$$

จะพบว่า $x = 2$ เป็นค่าวิกฤตเพียงค่าเดียวบนช่วง $[0, 5]$

จึงสามารถตรวจสอบค่าวิกฤตว่า จะทำให้เกิดค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์หรือไม่ โดยใช้อนุพันธ์อันดับ 2

$$f''(x) = -2$$

เอา $x = 2$ ไปแทน จะได้

$$f''(2) = -2 < 0$$

แสดงว่า $x = 2$ เป็นค่าวิกฤตที่ทำให้เกิดค่าสูงสุดสัมบูรณ์

$$\therefore f(2) = -(2)^2 + 4(2) + 5 = 9$$

$\therefore$ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ มีค่า เท่ากับ 9 ตอบ

ข้อสังเกต

1. ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ไม่จำเป็นต้องเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ อาจจะเป็นค่าของฟังก์ชันที่จุดปลายของโดเมนของฟังก์ชันก็ได้
2. ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ไม่จำเป็นต้องเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ อาจจะเป็นค่าของฟังก์ชันที่จุดปลายของโดเมนของฟังก์ชันก็ได้

สรุป

วิธีการหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$

1. หาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
2. หาค่า $f(a)$ และ $f(b)$
3. นำค่าที่ได้จากข้อ 1. และ 2. มาเปรียบเทียบกัน ค่ามากที่สุด คือ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์
ค่าน้อยที่สุด คือ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 11.3 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 ชั่วโมงที่ 28 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	-------------	---

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.4

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
	จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันบนช่วงปิดที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ แล้ว เติมคำตอบลงในตารางให้ถูกต้องสมบูรณ์	
1	$f(x) = x^2 + \frac{4}{x}$; $[1,5]$	
2	$f(x) = x^2 - 9x^2 + 24x$; $[0,10]$	
3	$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$; $[-3,3]$	
4	$f(x) = x^2 + 2x - 4$; $[-4,3]$	
5	$f(x) = 2x^2 - x^2 + 2$; $[-2,1]$	
6	$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 4$; $[-5,6]$	

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลย แบบฝึกทักษะ ที่ 11.3

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
	จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันบนช่วงปิดที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ แล้ว เติมคำตอบลงในตารางให้ถูกต้องสมบูรณ์	
1	$f(x) = x^2 + \frac{4}{x} ; [1,5]$	ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ มีค่าเท่ากับ 4
2	$f(x) = x^2 - 9x^2 + 24x ; [0,10]$	ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ มีค่าเท่ากับ 340
3	$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1 ; [-3,3]$	ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ เท่ากับ 11 ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ เท่ากับ -49
4	$f(x) = x^2 + 2x - 4 ; [-4,3]$	ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ เท่ากับ 11 ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ เท่ากับ -5
5	$f(x) = 2x^2 - x^2 + 2 ; [-2,1]$	ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ เท่ากับ 3 ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ เท่ากับ -18
6	$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 4 ; [-5,6]$	ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ เท่ากับ 274 ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ เท่ากับ -1

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แผ่นโปรงใส	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 11.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 ชั่วโมงที่ 29 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	------------	--

โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

ตัวอย่าง ถ้าผลบวกของจำนวนหนึ่งกับ 3 เท่าของจำนวนอีกจำนวนหนึ่งเท่ากับ 60 แล้ว ผลคูณของจำนวนทั้งสองนี้จะมีค่ามากที่สุด เมื่อจำนวนทั้งสองมีค่าเท่าใด

วิธีทำ ให้จำนวนสองจำนวน คือ x และ y

จากโจทย์ จะได้ $x + 3y = 60$

$$y = \frac{60-x}{3} = 20 - \frac{x}{3}$$

ผลคูณของจำนวนสองจำนวน $= xy$

$$= x \left(20 - \frac{x}{3} \right)$$

$$\text{ให้ } P = 20x - \frac{1}{3}x^2$$

$$\text{จะได้ } P' = 20 - \frac{2}{3}x$$

$$\therefore 20 - \frac{2}{3}x = 0$$

$$x = 30$$

$$y = 10$$

$\therefore$ จำนวนทั้งสอง คือ 30 และ 10

ตอบ

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แผ่นโปรงใส	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 11.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 ชั่วโมงที่ 29 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	------------	--

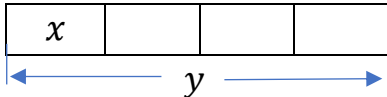
ขั้นตอนการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

- ① อ่านโจทย์อย่างละเอียดจนทราบว่าโจทย์ต้องการให้หาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด
- ② ให้ $f(x)$ เป็นสิ่งที่โจทย์ต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด
- ③ $f(x)$ ที่สร้างขึ้นต้องประกอบด้วยตัวแปรตัวเดียว
- ④ หาค่า $f'(x)$
- ⑤ ให้ $f'(x) = 0$ แล้ว แก้สมการหาค่า x
- ⑥ นำค่าวิกฤต ในข้อ ⑤ มาทำการตรวจสอบว่าทำให้ y มีค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดหรือไม่
- ⑦ นำค่า x ที่ได้จากข้อ ⑥ ไปแทนค่าเพื่อหาค่า y ซึ่งเป็นค่าสูงสุด หรือ ค่าต่ำสุดตามต้องการ

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 11.4 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 ชั่วโมงที่ 29 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	-------------	---

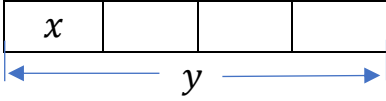
แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.5

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าสูงสุด หรือ ต่ำสุด	คำตอบ
1	รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีความยาวด้านทั้งสามเป็น 60 , 80 และ 100 หน่วย จงหาความกว้างและความยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุดที่บรรจุอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนี้	
2	ชายคนหนึ่งมีไม้ระแนงสำหรับทำรั้วได้ยาว 80 เมตร เขาต้องการล้อมรั้วบริเวณรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า พร้อมทั้งกันเป็น 4 ช่วงเท่าๆ กัน ดังรูป จงหาว่าพื้นที่มากที่สุดที่เขาจะล้อมรั้วได้เท่ากับเท่าใด 	

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลย แบบฝึกทักษะ ที่ 11.4

ข้อ	โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าสูงสุด หรือ ต่ำสุด	คำตอบ
1	รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีความยาวด้านทั้งสามเป็น 60 , 80 และ 100 หน่วย จงหาความกว้างและความยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุดที่บรรจุอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนี้	รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุด จะมี ความกว้าง 30 หน่วย ความยาว 40 หน่วย
2	ชายคนหนึ่งมีไม้ระแนงสำหรับทำรั้วได้ยาว 80 เมตร เขาต้องการล้อมรั้วบริเวณรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า พร้อมทั้งกันเป็น 4 ช่วงเท่าๆ กัน ดังรูป จงหาว่าพื้นที่มากที่สุดที่เขาจะล้อมรั้วได้เท่ากับเท่าใด 	พื้นที่ที่มากที่สุดที่จะล้อมรั้วได้ เท่ากับ 160 ตารางเมตร

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบสรุปเนื้อหา	รหัส แบบสรุปเนื้อหาที่ 11 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 ชั่วโมงที่ 29 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	----------------	--

คำชี้แจง ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาจากเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 9.1-9.3 ตามหัวข้อต่อไปนี้

1. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน หมายถึง

.....

.....

.....

.....

2. ขั้นตอนในการหาสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ มีดังนี้

.....

.....

.....

.....

.....

3. ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันบนช่วง $[a, b]$ คือ

.....

.....

4. ขั้นตอนในการหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ มีดังนี้

.....

.....

.....

5. หลักในการแก้ปัญหาโจทย์เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด มีดังนี้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์	หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน เวลา 1 ชั่วโมง
--	---------------------------	--

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำ ทุกข้อ

1) ให้ $f(x) = x^2 + 2x - 4$ จงหา

1.1 อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง $x = 2$ ถึง $x = 6$

1.2 อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ขณะ $x = 4$

2) จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

2.1 $f(x) = 3x^2 + 6x + 20$

2.2 $f(x) = (x^2 + 1)(x + 2)$

3) ให้ $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 6x$ จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(4,6)$

4) จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} + 2$

5) ให้ $f(x) = x^2 + 7x + 10$ เป็นฟังก์ชันบนช่วง $[2,5]$ จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

6) มีลวดยาว 80 เซนติเมตร ต้องการตัดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ให้มีพื้นที่มากที่สุด จะต้องตัดลวดให้มีด้านกว้างยาวเท่าใด

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	ภาคเรียนที่ 1
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น	จำนวน 58 ชั่วโมง	
เรื่อง ปฏิยานุพันธ์	จำนวน 4 ชั่วโมง	
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/.....	วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ.	คาบที่
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/.....	วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ.	คาบที่

1. มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย ทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2. ตัวชี้วัด

ค 6.1 ม.6/1 ให้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

ค 6.1 ม.6/2 ให้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/3 ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/4 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

ค 6.1 ม.6/5 เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และนำความรู้ หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ

ค 6.1 ม.6/6 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

3. สาระสำคัญ

กระบวนการตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ คือ การหาฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อกำหนด $f'(x)$ มาให้ ซึ่งเรียกว่า การหาปฏิยานุพันธ์

4. จุดประสงค์การเรียนรู้ (K-P-A)

ด้านความรู้ (K): นักเรียนสามารถ

1) บอกความหมายของกระบวนการตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ได้

2) หาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

5) นำความรู้เกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ การหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์ได้

ด้านทักษะและกระบวนการ (P) : นักเรียนเกิดทักษะดังนี้

1) มีการแก้ปัญหา

2) มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

3) มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : นักเรียนสามารถ

- 1) คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง
- 2) นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กระตือรือร้น ชัดเจน และตรงประเด็น
- 3) ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย

5. สารการเรียนรู้

โดยทั่วไป จะนิยามปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ใดๆ ดังนี้

บทนิยาม ฟังก์ชัน F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f เมื่อ $F'(x) = f(x)$

สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในโดเมนของ f

การหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนด $f(x)$

ขั้นตอนที่ 2 ลองให้ $y = F(x)$

ขั้นตอนที่ 3 หา $F'(x)$

ขั้นตอนที่ 4 ทดสอบว่า $F'(x) = f(x)$ หรือไม่

1. ถ้า $F'(x) = f(x)$ แล้ว $y = F(x) + c$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f
2. ถ้า $F'(x) \neq f(x)$ ให้ดำเนินการตามขั้นตอนที่ 2 ใหม่

6. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

6.1 แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ ว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ

- บอกความหมายของกระบวนการตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ได้
- หาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

6.2 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์โดยใช้สูตร โดยใช้การถาม-ตอบ

ขั้นสอน

6.3 นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 12 แล้วร่วมกันอภิปรายการหากระบวนการตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ โดยครูอธิบายเพิ่มเติมจนกว่านักเรียนจะเข้าใจ

ขั้นสรุป

6.4 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 12 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลยและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

6.5 นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนเข้าแข่งขันการหาปฏิยานุพันธ์ จำนวน 10 ข้อ กลุ่มใดทำได้คะแนนสูงสุดจะเป็นผู้ชนะ และได้รับรางวัลจากครูผู้สอน

6.6 นักเรียนทำเอกสารฝึกหัดเพิ่มเติม รหัสที่ 12 เป็นการบ้าน เพื่อเสริมทักษะและความแม่นยำในการเรียนรู้

7. สื่อ / แหล่งการเรียนรู้

7.1 ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

7.2 ห้องสมุดโรงเรียน

7.3 อินเทอร์เน็ต

8. การวัดและประเมินผล (K-P-A)

การวัดและประเมินผล จุดประสงค์	วิธีการวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
ความรู้ความเข้าใจ(K):นักเรียนสามารถ. บอกความหมายของกระบวนการตรงกัน ข้ามกับการหาอนุพันธ์ได้ หาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้	1. สังเกตจากการตอบ คำถาม 2. สังเกตจากการร่วม กิจกรรม	1. แบบบันทึกการสังเกต 2. แบบฝึกหัด	นักเรียนทุกคนทำถูกต้องไม่ ต่ำกว่าร้อยละ 70 ของ คะแนนทั้งหมด
ด้านทักษะกระบวนการ(P): นักเรียนเกิด ทักษะดังนี้ 1. มีการแก้ปัญหา 2. มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทาง คณิตศาสตร์และการนำเสนอ 3. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	1. สังเกตการทำ กิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การ ประเมินในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะ(A):นักเรียนสามารถ 1. คิดอย่างหลากหลาย มีความคิด ตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงาน อย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง 2. นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กระตือรือร้น ชัดเจน และตรงประเด็น 3. ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความ เชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย	1. สังเกตการทำ กิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การ ประเมินในระดับดีขึ้นไป

เกณฑ์การวัดและประเมินผล

เกณฑ์การประเมินผลจากการทำกิจกรรม

ร้อยละ 80 ขึ้นไป หมายถึง ดีมาก

ร้อยละ 70-79 หมายถึง ดี

ร้อยละ 60-69 หมายถึง ปานกลาง

ร้อยละ 50-59 หมายถึง พอใช้

ต่ำกว่า ร้อยละ 50 หมายถึง ปรับปรุง

ผ่านการประเมินตั้งแต่ ร้อยละ ขึ้นไป

9. บูรณาการหลักเศรษฐกิจพอเพียง

1. ผู้สอนใช้หลักเศรษฐกิจพอเพียงในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ประเด็น \ ปศพ	พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
กิจกรรมการเรียนรู้	ก่อนการจัดกิจกรรมมีการวางแผนการเรียนรู้ชัดเจน เป็นลำดับขั้นตอน มีการกำหนดเนื้อหาสาระและกระบวนการเหมาะสมกับนักเรียน ชั้น ม.6	จัดการเรียนรู้ตรงมาตรฐาน ตัวชี้วัดของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มาตรฐานตัวชี้วัด ค 1.1	มีการวางแผนการจัดกิจกรรมที่ชัดเจน เป็นขั้นตอน จากง่ายไปยาก จากรูปธรรมไปหานามธรรม
เวลา	กำหนดเนื้อหาสาระตามมาตรฐาน ตัวชี้วัด ค 5.3 เพื่อให้เหมาะสมกับเวลาเรียน 2 ชั่วโมง นักเรียนทำกิจกรรมตามแผนการจัดการเรียนรู้ได้ทันตามเวลา	กิจกรรมการเรียนรู้บรรลุ ตัวชี้วัดได้ตามเวลาที่กำหนด	มีการถามตอบ ทำให้นักเรียนเข้าใจและทำงานอย่างมีความสุข
สื่อ	จัดเตรียมและใช้สื่อในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ มีแบบฝึกหัดเพียงพอกับนักเรียน	นักเรียนได้เรียนรู้จากง่ายไปหายากและเรียนรู้ด้วยความสุข	สื่อแบบฝึกหัดน่าสนใจและคุ้มค่า
แหล่งเรียนรู้	แหล่งเรียนรู้ที่ใช้เหมาะสมกับเนื้อหาสาระและกิจกรรม	นักเรียนใช้เป็นต้นแบบความคิดและปรับปรุงเป็นของตนเอง สะดวก ใช้งาน	-จัดห้องสื่อทันสมัย -สำรวจข้อมูลจากห้องสมุด -สำรวจข้อมูลจากอินเทอร์เน็ต
ความรู้ที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	-เทคนิควิธีการสอน รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ -ศึกษารูปแบบของแบบฝึก -วิเคราะห์และจัดทำเครื่องมือการวัดและประเมินผล -ศึกษา ค้นคว้าและนำหลักของปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียงมาบูรณาการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้		
คุณธรรม	-มีความรับผิดชอบในการปฏิบัติการสอน เข้าสอนตรงเวลา ปฏิบัติการสอนเต็มเวลา เต็มความสามารถ มีการเตรียมการสอน สื่อและแบบฝึกหัดไว้ล่วงหน้า -มีเมตตา ให้ความเสมอภาคและยุติธรรมกับนักเรียนทุกคน -มีความอดทน เสียสละ ใฝ่รู้ มีน้ำใจ		

คุณลักษณะ “อยู่อย่างพอเพียง”

พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
วางแผนในการทำงานรอบคอบเป็นระบบ และเตรียมอุปกรณ์การเรียนพร้อม	-มีความรู้ สามารถอธิบายการให้เหตุผลและสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาบางอย่างได้ - วิเคราะห์และเลือกวิธีที่สะดวกในการหาคำตอบ -มีความกระตือรือร้น สนใจเข้ากิจกรรม รู้จักการทำงานร่วมกับผู้อื่น	-ฝึกการทำงานโดยใช้ความคิดสร้างสรรค์ของตนเอง -สามารถใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และกระบวนการคิด -วิเคราะห์สาเหตุของการทำแบบฝึกหัดไม่ถูกต้องได้ด้วยตนเอง
ความรู้ (วิธีการ) - เรียนรู้จากแบบฝึกที่เป็นรูปธรรมไปหนามธรรม - เรียนรู้จากแบบฝึกง่ายไปหายาก - สามารถสรุปความคิดได้จากแบบฝึกหัด - ศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมได้จากแหล่งเรียนรู้ที่หลากหลาย ห้องสมุดกลุ่มสาระฯ ห้องสมุดโรงเรียน อินเทอร์เน็ต		
คุณธรรมที่เกิดกับนักเรียน - มีวินัย - ซื่อสัตย์สุจริต - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน - มีจิตสาธารณะ - มีความกระตือรือร้น		

3. ผลลัพธ์ KPA 4 มิติ ที่เกี่ยวข้องกับการอยู่อย่างพอเพียง

ผลลัพธ์	สมดุลและพร้อมต่อการเปลี่ยนแปลงในด้านต่าง ๆ			
	ด้านวัตถุ	ด้านสังคม	ด้านสิ่งแวดล้อม	ด้านวัฒนธรรม
ด้านความรู้	รู้จักกับการให้เหตุผล และสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา	มีความรู้ในการวางแผนการทำงาน		
ด้านทักษะ	สามารถอธิบาย การให้เหตุผล และนำไปใช้แก้ปัญหา	-สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้ -มีทักษะในการปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่นได้		
ด้านค่านิยม	เห็นคุณค่าของการให้เหตุผล	เห็นความสำคัญของการทำงานร่วมกับผู้อื่น		

10. บันทึกการจัดการเรียนรู้

ความคิดเห็นของผู้บริหาร

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ผู้อำนวยการ/รองผู้อำนวยการ/หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้

...../...../.....

บันทึกผลการสอน

1. ผลการสอน

.....

.....

.....

2. ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ

(นายสุเมธ จันทรมบัติ) ผู้สอน

...../...../.....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 12 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12 ชั่วโมงที่ 30-31 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	--------------------	---

จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 บอกความหมายของกระบวนการตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ได้

1.2 หาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

สาระสำคัญ

กระบวนการตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ คือ การหาฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อกำหนด $f'(x)$ มาให้ เรียก การหาปฏิยานุพันธ์

สาระการเรียนรู้

กระบวนการตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์

(การหาปฏิยานุพันธ์)

โดยทั่วไป จะนิยามปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ใดๆ ดังนี้

บทนิยาม ฟังก์ชัน F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f เมื่อ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในโดเมนของ f

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่า $F(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}}$

วิธีทำ จาก $F(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$$F'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}(2x)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\therefore F'(x) = f(x)$$

ดังนั้น $F(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}}$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาฟังก์ชัน F เมื่อกำหนด $F'(x) = 3x^2$

วิธีทำ ให้ $F_1'(x) = x^3$

จะได้ $F_1'(x) = 3x^2$ ซึ่งเป็นสิ่งที่กำหนดให้

นั่นคือ $F(x) = x^3 + C$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = x - 1$ จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f

วิธีทำ ให้ $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$ จะได้ $F'(x) = x - 1$

$F_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$ จะได้ $F_1'(x) = x - 1$

$F_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 7$ จะได้ $F_2'(x) = x - 1$

จะเห็นว่า F_1, F_2 ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x - 1$

$\therefore F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว เป็นรูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x - 1$ ตอบ

สรุป

การหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนด $f(x)$

ขั้นตอนที่ 2 ลองให้ $y = F(x)$

ขั้นตอนที่ 3 หา $F'(x)$

ขั้นตอนที่ 4 ทดสอบว่า $F'(x) = f(x)$ หรือไม่

1. ถ้า $F'(x) = f(x)$ แล้ว $y = F(x) + C$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f

2. ถ้า $F'(x) \neq f(x)$ แล้ว ให้ดำเนินการตามขั้นตอนที่ 2 ใหม่

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 12 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12 ชั่วโมงที่ 30-31 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	-------------	--

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.1-1.2

คำชี้แจง ให้นักเรียนหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ แล้วเติมคำตอบลงแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	$f(x) = 5x$	
2	$f(x) = x^3$	
3	$f(x) = \frac{1}{x^5}$	
4	$f(x) = x\sqrt{x}$	
5	$f(x) = x^6$	
6	$f(x) = x^{10}$	
7	$f(x) = x^{-4}$	
8	$f(x) = 3x^2 + 7$	

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลย แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 12

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	$f(x) = 5x$	$5 + C$
2	$f(x) = x^3$	$\frac{x^4}{4} + C$
3	$f(x) = \frac{1}{x^5}$	$-\frac{1}{4x^4}$
4	$f(x) = x\sqrt{x}$	$\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$
5	$f(x) = x^6$	$\frac{x^7}{7} + C$
6	$f(x) = x^{10}$	$\frac{x^{11}}{11} + C$
7	$f(x) = x^{-4}$	$-\frac{1}{3x^3} + C$
8	$f(x) = 3x^2 + 7$	$x^3 + 7x + C$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารฝึกหัดเพิ่มเติม	รหัส เอกสารฝึกหัดเพิ่มเติมที่ 12 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12 ชั่วโมงที่ 30-31 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	-----------------------	--

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำทุกข้อ

จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $f(x) = 4x^2$
2. $f(x) = 6x^2$
3. $f(x) = x \sqrt[3]{x}$
4. $f(x) = \frac{1}{x^7}$
5. $f(x) = 4x^2 + 7x$
6. $f(x) = x^2 + 2$
7. $f(x) = x^{-3} + 1$
8. $f(x) = \frac{1}{x^{-4}}$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น

จำนวน 58 ชั่วโมง

เรื่อง ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

จำนวน 8 ชั่วโมง

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/..... วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ. คาบที่

1. มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย ทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2. ตัวชี้วัด

ค 6.1 ม.6/1 ให้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

ค 6.1 ม.6/2 ให้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/3 ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/4 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

ค 6.1 ม.6/5 เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และนำความรู้ หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ

ค 6.1 ม.6/6 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

3. สาระสำคัญ

รูปทั่วไปของปริพันธ์ของฟังก์ชัน f คือ ฟังก์ชัน $y = F(x) + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x)dx$ อ่านว่า “ อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x ”

4. จุดประสงค์การเรียนรู้ (K-P-A)

ด้านความรู้ (K): นักเรียนสามารถ

- 1) บอกความหมายของอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้
 - 2) หาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้
 - 3) นำความรู้เรื่อง อินทิกรัลไม่จำกัดเขตไปใช้ในการแก้โจทย์ได้
 - 5) นำความรู้เกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ การหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์ได้
- ด้านทักษะและกระบวนการ (P) : นักเรียนเกิดทักษะดังนี้
- 1) มีการแก้ปัญหา
 - 2) มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ
 - 3) มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : นักเรียนสามารถ

- 1) คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง
- 2) นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กะทัดรัด ชัดเจน และตรงประเด็น
- 3) ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย

5. สารการเรียนรู้

อินทิกรัลไม่จำกัดเขต

สำหรับฟังก์ชัน f ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงใดๆ จะนิยามอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน ดังนี้
 นิยาม เมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในโดเมนของ f อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x)dx$ โดยที่ $\int f(x)dx = F(x) + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัวใดๆ

จากบทนิยาม เรียกกระบวนการ $\int f(x)dx$ ว่า “ การอินทิเกรต ” หรือ การหาปริพันธ์ เครื่องหมาย “ $\int$ ” เรียกว่า เครื่องหมาย อินทิกรัล หรือ เครื่องหมายปริพันธ์ เรียก $f(x)$ ว่า ตัวถูกอินทิเกรต หรือตัวถูกหาปริพันธ์ และ dx เป็นสัญลักษณ์ที่บอกว่า การอินทิเกรตนี้เทียบกับตัวแปร x หรือเป็นตัวอย่างบอกให้รู้ว่า เป็นการหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร x

6. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

6.1 แจกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ ว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ

- บอกความหมายของอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้
- หาสัญลักษณ์ที่ใช้แทนอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้
- บอกสูตรเกี่ยวกับการอินทิเกรตที่นำมาใช้ในการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้
- หาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้
- หาความรู้เรื่อง อินทิกรัลไม่จำกัดเขตไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้

6.2 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาปริพันธ์ โดยใช้การถาม-ตอบ

ขั้นสอน

6.3 นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 13.1 แล้วร่วมกันอภิปรายสรุปความหมายของอินทิกรัลไม่จำกัดเขตและสัญลักษณ์ที่ใช้แทนอินทิกรัลไม่จำกัดเขต โดยครูอธิบายเพิ่มเติมถ้านักเรียนสงสัย หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 13

6.4 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 13.1 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ให้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

6.5 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับความหมายของอินทิกรัลไม่จำกัดเขต โดยใช้การถาม-ตอบ

6.6 นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 13.2 แล้วร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการหาอินทิกรัล จากสูตรการหาอินทิเกรต สูตรที่ 1-3 โดยครูอธิบายเพิ่มเติมเมื่อนักเรียนสงสัย

6.7 ครูยกตัวอย่างการหาอินทิกรัล 2-3 ตัวอย่างบนกระดาน แล้วให้นักเรียนร่วมกันหา เพื่อทดสอบความเข้าใจของนักเรียน ดังนี้

1. จงหา $\int x^6 dx$
2. จงหา $\int \frac{1}{x^5} dx$
3. จงหา $\int 3x^2 dx$

6.8 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 13.2 เป็นการบ้านเพื่อเสริมทักษะและความแม่นยำในการเรียนรู้

6.9 ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 13.2 แล้วให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

6.10 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต จากสูตรที่ 1 – 3 โดยใช้การถาม-ตอบ

ขั้นสรุป

6.11 นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 13.3 แล้วร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการหาอินทิกรัล โดยใช้สูตรที่ 4-5 โดยครูคอยอธิบายเพิ่มเติม หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 13

6.12 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 13.3 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลยและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

6.13 นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนเข้าแข่งขันการหาอินทิกรัล กลุ่มละ 1 คน ในช่วงต่อไป

6.14 นักเรียนตัวแทนแต่ละกลุ่มเข้าแข่งขันการหาอินทิกรัล จำนวน 10 ข้อ ให้เวลาทำ 15 นาที เมื่อทำเสร็จให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจตามที่ครูเฉลยและ บันทึกคะแนนที่ได้ไว้

6.15 ครูตรวจสอบผลการแข่งขันของนักเรียนแต่ละกลุ่ม พร้อมทั้งประกาศผลผู้ชนะอันดับ 1 , 2 และ 3 และมอบรางวัล

6.16 นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 13.4 โดยศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างให้ละเอียด ถ้ามีข้อสงสัยให้สอบถามครูผู้สอน

6.17 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 13.4 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลยและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

6.18 นักเรียนแต่ละกลุ่มจัดทำแผนภูมิสูตรเกี่ยวกับการอินทิเกรต เป็นผลงานของกลุ่มส่งครูนอกเวลาเรียน

7. สื่อ / แหล่งการเรียนรู้

7.1 ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

7.2 ห้องสมุดโรงเรียน

7.3 อินเทอร์เน็ต

8. การวัดและประเมินผล (K-P-A)

จุดประสงค์ \ การวัดและประเมินผล	วิธีการวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
ความรู้ความเข้าใจ(K):นักเรียนสามารถ. บอกความหมายของอินทรีลไม่จำกัดเขต ได้ บอกสัญลักษณ์ที่ใช้แทนอินทรีลไม่จำกัด เขตได้ บอกสูตรเกี่ยวกับการอินทรีลที่นำมาใช้ ในการหาอินทรีลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน ได้ หาอินทรีลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้ นำความรู้เรื่อง อินทรีลไม่จำกัดเขตไป ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้	1. สังเกตจากการตอบ คำถาม 2. สังเกตจากการร่วม กิจกรรม	1. แบบบันทึกการสังเกต 2. แบบฝึกหัด	นักเรียนทุกคนทำต้องไม่ต่ำ กว่าร้อยละ 70 ของคะแนน ทั้งหมด
ด้านทักษะกระบวนการ(P): นักเรียนเกิด ทักษะดังนี้ 1. มีการแก้ปัญหา 2. มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทาง คณิตศาสตร์และการนำเสนอ 3. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	1. สังเกตการทำ กิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การ ประเมินในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะ(A):นักเรียนสามารถ 1. คิดอย่างหลากหลาย มีความคิด ตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงาน อย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง 2. นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กะทัดรัด ชัดเจน และตรงประเด็น 3. ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความ เชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย	1. สังเกตการทำ กิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การ ประเมินในระดับดีขึ้นไป

เกณฑ์การวัดและประเมินผล

เกณฑ์การประเมินผลจากการทำกิจกรรม

ร้อยละ 80 ขึ้นไป หมายถึง ดีมาก

ร้อยละ 70-79 หมายถึง ดี

ร้อยละ 60-69 หมายถึง ปานกลาง

ร้อยละ 50-59 หมายถึง พอใช้

ต่ำกว่า ร้อยละ 50 หมายถึง ปรับปรุง

ผ่านการประเมินตั้งแต่ ร้อยละ ขึ้นไป

9. บูรณาการหลักเศรษฐกิจพอเพียง

1. ผู้สอนใช้หลักเศรษฐกิจพอเพียงในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ประเด็น \ ปศพ	พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
กิจกรรมการเรียนรู้	ก่อนการจัดกิจกรรมมีการวางแผนการเรียนรู้ชัดเจน เป็นลำดับขั้นตอน มีการกำหนดเนื้อหาสาระและกระบวนการเหมาะสมกับนักเรียน ชั้น ม.6	จัดการเรียนรู้ตรงมาตรฐาน ตัวชี้วัดของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มาตรฐานตัวชี้วัด ค 1.1	มีการวางแผนการจัดกิจกรรมที่ชัดเจน เป็นขั้นตอน จากง่ายไปยาก จากรูปธรรมไปหานามธรรม
เวลา	กำหนดเนื้อหาสาระตามมาตรฐาน ตัวชี้วัด ค 5.3 เพื่อให้เหมาะสมกับเวลาเรียน 2 ชั่วโมง นักเรียนทำกิจกรรมตามแผนการจัดการเรียนรู้ได้ทันตามเวลา	กิจกรรมการเรียนรู้บรรลุ ตัวชี้วัดได้ตามเวลาที่กำหนด	มีการถามตอบ ทำให้นักเรียนเข้าใจและทำงานอย่างมีความสุข
สื่อ	จัดเตรียมและใช้สื่อในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ มีแบบฝึกหัดเพียงพอกับนักเรียน	นักเรียนได้เรียนรู้จากง่ายไปหายากและเรียนรู้ด้วยความสุข	สื่อแบบฝึกหัดน่าสนใจและคุ้มค่า
แหล่งเรียนรู้	แหล่งเรียนรู้ที่ใช้เหมาะสมกับเนื้อหาสาระและกิจกรรม	นักเรียนใช้เป็นต้นแบบความคิดและปรับปรุงเป็นของตนเอง สะดวก ใช้งาน	-จัดห้องสื่อทันสมัย -สำรวจข้อมูลจากห้องสมุด -สำรวจข้อมูลจากอินเทอร์เน็ต
ความรู้ที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	-เทคนิควิธีการสอน รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ -ศึกษารูปแบบของแบบฝึก -วิเคราะห์และจัดทำเครื่องมือการวัดและประเมินผล -ศึกษา ค้นคว้าและนำหลักของปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียงมาบูรณาการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้		
คุณธรรม	-มีความรับผิดชอบในการปฏิบัติการสอน เข้าสอนตรงเวลา ปฏิบัติการสอนเต็มเวลา เต็มความสามารถ มีการเตรียมการสอน สื่อและแบบฝึกหัดไว้ล่วงหน้า -มีเมตตา ให้ความเสมอภาคและยุติธรรมกับนักเรียนทุกคน -มีความอดทน เสียสละ ใฝ่รู้ มีน้ำใจ		

คุณลักษณะ “อยู่อย่างพอเพียง”

พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
วางแผนในการทำงานรอบคอบเป็นระบบ และเตรียมอุปกรณ์การเรียนพร้อม	-มีความรู้ สามารถอธิบายการให้เหตุผลและสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาบางอย่างได้ - วิเคราะห์และเลือกวิธีที่สะดวกในการหาคำตอบ -มีความกระตือรือร้น สนใจเข้ากิจกรรม รู้จักการทำงานร่วมกับผู้อื่น	-ฝึกการทำงานโดยใช้ความคิดสร้างสรรค์ของตนเอง -สามารถใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และกระบวนการคิด -วิเคราะห์สาเหตุของการทำแบบฝึกหัดไม่ถูกต้องได้ด้วยตนเอง
ความรู้ (วิธีการ) - เรียนรู้จากแบบฝึกที่เป็นรูปธรรมไปหนามธรรม - เรียนรู้จากแบบฝึกง่ายไปหายาก - สามารถสรุปความคิดได้จากแบบฝึกหัด - ศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมได้จากแหล่งเรียนรู้ที่หลากหลาย ห้องสมุดกลุ่มสาระฯ ห้องสมุดโรงเรียน อินเทอร์เน็ต		
คุณธรรมที่เกิดกับนักเรียน - มีวินัย - ซื่อสัตย์สุจริต - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน - มีจิตสาธารณะ - มีความกระตือรือร้น		

3. ผลลัพธ์ KPA 4 มิติ ที่เกี่ยวข้องกับการอยู่อย่างพอเพียง

ผลลัพธ์	สมดุลและพร้อมต่อการเปลี่ยนแปลงในด้านต่าง ๆ			
	ด้านวัตถุ	ด้านสังคม	ด้านสิ่งแวดล้อม	ด้านวัฒนธรรม
ด้านความรู้	รู้จักกับการให้เหตุผล และสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา	มีความรู้ในการวางแผนการทำงาน		
ด้านทักษะ	สามารถอธิบาย การให้เหตุผล และนำไปใช้แก้ปัญหา	-สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้ -มีทักษะในการปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่นได้		
ด้านค่านิยม	เห็นคุณค่าของการให้เหตุผล	เห็นความสำคัญของการทำงานร่วมกับผู้อื่น		

10. บันทึกการจัดการเรียนรู้

ความคิดเห็นของผู้บริหาร

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ผู้อำนวยการ/รองผู้อำนวยการ/หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้

...../...../.....

บันทึกผลการสอน

1. ผลการสอน

.....

.....

.....

2. ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ

(นายสุเมธ จันทรมบัติ) ผู้สอน

...../...../.....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 13.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13 ชั่วโมงที่ 32 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	--------------------	--

จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 บอกความหมายของอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้

1.2 บอกสัญลักษณ์ที่ใช้แทนอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้

สาระสำคัญ

รูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของ f คือ ฟังก์ชัน $y = F(x) + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว เขียนแทนสัญลักษณ์ $\int f(x)dx$ อ่านว่า “ อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x ”

สาระการเรียนรู้

อินทิกรัลไม่จำกัดเขต

สำหรับฟังก์ชัน f ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงใดๆ จะนิยามอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน ดังนี้
บทนิยาม เมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตจำนวนจริง และ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในโดเมนของ f อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x)dx$ โดยที่ $\int f(x)dx = F(x) + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัวใดๆ

จากบทนิยาม เรียกกระบวนการ $\int f(x)dx$ ว่า “ การอินทิเกรต ” หรือการหาปริพันธ์ เครื่องหมาย “ $\int$ ” เรียกว่า เครื่องหมายอินทิกรัล หรือเครื่องหมายปริพันธ์ เรียก $f(x)$ ว่า ตัวถูกอินทิเกรต หรือตัวถูกหาปริพันธ์ และ dx เป็นสัญลักษณ์ที่บอกว่าการอินทิเกรตนี้เทียบกับตัวแปร x หรือเป็นตัวอย่างที่บอกให้รู้ว่า เป็นการหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร x

ตัวอย่างที่ 1 จงหาปฏิยานุพันธ์ในรูปทั่วไปโดยใช้สัญลักษณ์ของปริพันธ์ไม่จำกัดเขตในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$1. f(x) = x^4$$

$$2. f(x) = x^{10}$$

วิธีทำ

$$1. \int f(x)dx = \int x^4 dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + C$$

ตอบ

$$2. \int f(x)dx = \int x^{10} dx$$

$$= \frac{x^{11}}{11} + C$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาปฏิยานุพันธ์ในรูปทั่วไป โดยใช้สัญลักษณ์ของปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

$$1. g(x) = x^{\frac{5}{3}}$$

$$2. h(x) = x^{-4}$$

วิธีทำ 1. $\int g(x) = \int x^{\frac{5}{3}} dx$

$$= \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{8} x^{\frac{8}{3}} + C$$

ตอบ

2. $\int h(x) = \int x^{-4}$

$$= \frac{x^{-3}}{-3} + C$$

$$= -\frac{1}{3x^3} + C$$

ตอบ

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 13.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13 ชั่วโมงที่ 32 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	-------------	---

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.1-1.2

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

- การอินทิเกรต หรือการหาปริพันธ์ของ f เมื่อเทียบกับ x แทนด้วยสัญลักษณ์
- เครื่องหมาย “ $\int$ ” เรียกว่า
- $\int f(x)dx$ อ่านว่า
- จงหา $\int x^8 dx$
- จงหา $\int x^{-7} dx$
- จงหา $\int x^6 dx$
- จงหา $\int x^{\frac{4}{3}} dx$
- จงหา $\int x^{12} dx$

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลย แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 13.1

1. การอินทิเกรต หรือการหาปริพันธ์ของ f เมื่อเทียบกับ x แทนด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x)dx$
2. เครื่องหมาย “ $\int$ ” เรียกว่า เครื่องหมายอินทิกรัล หรือ เครื่องหมายปริพันธ์
3. $\int f(x)dx$ อ่านว่า “อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x ”
หรือ “ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ f เมื่อเทียบกับ x ”
4. จงหา $\int x^8 dx$ $\frac{x^9}{9} + C$
5. จงหา $\int x^{-7} dx$ $\frac{x^{-6}}{-6} + C = -\frac{1}{6x^6} + C$
6. จงหา $\int x^6 dx$ $\frac{x^7}{7} + C$
7. จงหา $\int x^{\frac{4}{3}} dx$ $\frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + C$
8. จงหา $\int x^{12} dx$ $\frac{x^{13}}{13} + C$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 13.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13 ชั่วโมงที่ 33 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	-------------	---

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.3-1.4

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

1. จงหา $\int 6dx =$
2. จงหา $\int x^4 dx =$
3. จงหา $\int x^{\frac{5}{4}} dx =$
4. จงหา $\int 10dx =$
5. จงหา $\int x^{15} dx =$
6. จงหา $\int x^{18} dx =$
7. จงหา $\int 8x^2 dx =$
8. จงหา $\int 9x^3 dx =$
9. จงหา $\int -4x^{\frac{2}{3}} dx =$
10. จงหา $\int -6x^4 dx =$

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลย แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 13.2

1. จงหา $\int 6dx = \dots\dots\dots 6x + C$
2. จงหา $\int x^4 dx = \dots\dots\dots \frac{x^5}{5} + C$
3. จงหา $\int x^{\frac{5}{4}} dx = \dots\dots\dots \frac{4}{9} x^{\frac{9}{4}} + C$
4. จงหา $\int 10dx = \dots\dots\dots 10x + C$
5. จงหา $\int x^{15} dx = \dots\dots\dots \frac{x^{16}}{16} + C$
6. จงหา $\int x^{18} dx = \dots\dots\dots \frac{x^{19}}{19} + C$
7. จงหา $\int 8x^2 dx = \dots\dots\dots \frac{8}{3} x^3 + C$
8. จงหา $\int 9x^3 dx = \dots\dots\dots \frac{9}{4} x^4 + C$
9. จงหา $\int -4x^{\frac{2}{3}} dx = \dots\dots\dots -\frac{12}{5} x^{\frac{5}{3}} + C$
10. จงหา $\int -6x^4 dx = \dots\dots\dots -\frac{6}{5} x^5 + C$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารฝึกหัดเพิ่มเติมที่ 13.3 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13 ชั่วโมงที่ 34 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	--------------------	---

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.3 บอกสูตรเกี่ยวกับการอินทิเกรตที่นำมาใช้ในการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้
- 1.4 หาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้

สาระสำคัญ

การหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ f สามารถหาได้รวดเร็วโดยใช้สูตรเกี่ยวกับการหาอินทิเกรต หรือการหาปริพันธ์

สาระการเรียนรู้

สูตรเกี่ยวกับการอินทิเกรต (ต่อ)

สูตรเกี่ยวกับการหาอินทิเกรตที่นำมาใช้ในการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ f (ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ f) ในเอกสารชุดนี้มี
สูตรดังนี้

$$\text{สูตรที่ 4} \quad \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\int (x^2 + 2x)dx$

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 2x)dx &= \int x^2dx + \int 2xdx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + C \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2 + C \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int (x^4 + 3x^2 + 5x)dx$

$$\begin{aligned} \int (x^4 + 3x^2 + 5x)dx &= \int x^4dx + \int 3x^2dx + \int 5xdx \\ &= \frac{x^5}{5} + \frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + C \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

สูตรที่ 5 $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\int \left(2x - \frac{1}{x^2}\right)dx$

$$\begin{aligned} \int \left(2x - \frac{1}{x^2}\right)dx &= \int 2xdx - \int \frac{1}{x^2}dx \\ &= 2 \int xdx - \int x^{-2}dx \\ &= 2 \left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^{-1}}{-1} + C \\ &= x^2 + \frac{1}{x} + C \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int \left(x^{-2} - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) dx \\
 &= \int x^{-2} dx - \int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx \\
 &= \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{1}{2} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\
 &= -\frac{1}{x} - \sqrt{x} + C
 \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 5 ให้ $f'(x) = x^3 + 4x^2 - 6$ จงหา $f(x)$ เมื่อกำหนด $f(1) = 5$

จาก $f'(x) = x^3 + 4x^2 - 6$

$$\int f'(x) = \int (x^3 + 4x^2 - 6) dx$$

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 - 6x + C \dots\dots\dots(1)$$

และจาก $f(1) = 5$ จะได้ $f(x) = 5$ และ $x = 1$

แทนค่า x และ $f(x)$ ใน (1) จะได้

$$\begin{aligned}
 5 &= \frac{1}{4} + \frac{4}{3} - 6 + C \\
 60 &= 3 + 16 - 72 + 12C \\
 \therefore C &= \frac{113}{12}
 \end{aligned}$$

แทนค่า C ใน (1) จะได้

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 - 6x + \frac{113}{12}$$

ตอบ

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 13.3 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13 ชั่วโมงที่ 34 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	-------------	---

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.3-1.4

คำชี้แจง ให้นักเรียนหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ แล้วเติมคำตอบลงแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	จงหา $\int (x^2 + x^5) dx$	
2	จงหา $\int \left(10x - \frac{8}{x^5} - 2\right) dx$	
3	จงหา $\int \frac{2x^4 - x}{x^3} dx$	
4	จงหา $\int \left(3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$	
5	ให้ $f'(x) = 2x - 3$ และ $f(0) = 5$ จงหา $f(x)$	
6	ให้ $f'(x) = \frac{20}{\sqrt{x}}$ และ $f(1) = 40$ จงหา $f(x)$	
7	ให้ $f''(x) = 2x + 1$ และ $f'(x) = 2$ ที่ $x = -1$ และ $y = 2$ จงหา $f(x)$	

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลย แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 13.3

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	จงหา $\int (x^2 + x^5) dx$	$\frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} + C$
2	จงหา $\int \left(10x - \frac{8}{x^5} - 2 \right) dx$	$2x^5 + 2x^{-4} - 2x + C$
3	จงหา $\int \frac{2x^4 - x}{x^3} dx$	$x^2 + x^{-1} + C$
4	จงหา $\int \left(3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$	$2x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + C$
5	ให้ $f'(x) = 2x - 3$ และ $f(0) = 5$ จงหา $f(x)$	$f(x) = x^2 - 3x + 5$
6	ให้ $f'(x) = \frac{20}{\sqrt{x}}$ และ $f(1) = 40$ จงหา $f(x)$	$f(x) = 40\sqrt{x}$
7	ให้ $f''(x) = 2x + 1$ และ $f'(x) = 2$ ที่ $x = -1$ และ $y = 2$ จงหา $f(x)$	$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{23}{6}$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 13.4 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13 ชั่วโมงที่ 35 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	--------------------	--

จุดประสงค์การเรียนรู้

1.5 นำความรู้เรื่อง อินทิกรัลไม่จำกัดเขตไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้

สาระสำคัญ

ในการนำอินทิกรัลไม่จำกัดเขตไปประยุกต์ใช้นั้น ส่วนใหญ่จะนำไปใช้ในการหาฟังก์ชันหรือผลลัพธ์ต่างๆ ที่ได้จากฟังก์ชัน เมื่อเราทราบอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

สาระการเรียนรู้

โจทย์เกี่ยวกับการนำอินทิกรัลไม่จำกัดเขตไปใช้

อินทิกรัลไม่จำกัดเขตสามารถนำมาประยุกต์ใช้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ถ้ากำหนดความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด เป็น $3x^2 - 4x - 5$ แล้ว จงหาสมการเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(1, -6)$

วิธีทำ ให้ $y = f(x)$ เป็นสมการของเส้นโค้ง

$\therefore f'(x)$ คือ ความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใดๆ

จากโจทย์ จะได้

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 5$$

ใช้วิธีการหาอินทิกรัล จะได้

$$\begin{aligned} \int f'(x)dx &= \int (3x^2 - 4x - 5)dx \\ f(x) &= \frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - 5x + C \\ &= x^3 - 2x^2 - 5x + C \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

แต่เส้นโค้งผ่านจุด $(1, -6)$ จะได้ว่า $x = 1$ และ $f(x) = -6$

แทนค่า x และ $f(x)$ ใน (1)

$$-6 = 1 - 2 - 5 + C$$

$$C = 0$$

แทนค่า C ใน (1) จะได้สมการเส้นโค้ง คือ $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 ในขณะเวลา t ใดๆ วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง $-3t$ เมตร/วินาที² ขณะที่เริ่มต้นจับเวลาวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 1 เมตร/วินาที และ ได้ระยะทาง 3 เมตร จงหา สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ

วิธีทำ $\therefore a = \frac{dv}{dt} = -3t$

จะได้ $v = \int -3t dt = -\frac{3}{2}t^2 + C_1$

แต่ขณะที่เริ่มต้นจับเวลาวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 1 เมตร/วินาที

นั่นคือ ขณะ $t = 0$, $v = 1$

จาก $v = -\frac{3}{2}t^2 + C_1$

$$1 = 0 + C_1$$

$$C_1 = 1$$

$\therefore$ ความเร็วขณะเวลา t คือ $v = -\frac{3}{2}t^2 + 1$

เนื่องจาก $v = \frac{ds}{dt} = -\frac{3}{2}t^2 + 1$

จะได้ $S = \int \left(-\frac{3}{2}t^2 + 1\right) dx = -\frac{t^3}{2} + t + C_2$

แต่ขณะที่เริ่มต้นจับเวลาวัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 3 เมตร

นั่นคือ ขณะ $t = 0$, $S = 3$

จาก $S = -\frac{t^3}{2} + t + C_2$

$$3 = 0 + 0 + C_2$$

$$C_2 = 3$$

$\therefore$ สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ คือ $S = -\frac{t^3}{2} + t + 3$

ตอบ

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 13.4 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13 ชั่วโมงที่ 35 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
--	-------------	---

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.5

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	ให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นสัมผัสโค้ง เท่ากับ $\frac{6}{x^4}$ และเส้นโค้งดังกล่าวสัมผัสกับเส้นตรง $2x - y - 5 = 0$ ที่จุด $(1, -3)$ จงหาสมการของเส้นโค้ง	
2	วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง ด้วยความเร่ง 2 ฟุต/วินาที ² ถ้าภายใน 2 วินาที วัตถุดังกล่าวเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 200 ฟุต และที่เวลาเริ่มต้นความเร็วของวัตถุเท่ากับ 30 ฟุต/วินาที จงหาสมการของความเร็วและระยะทางในรูปของเวลา	
3	จงหาสมการของเส้นโค้งที่ผ่านจุด $P(-1,3)$ และ มีความชันของเส้นสัมผัสที่จุด (x, y) ใดๆ เท่ากับ $2x$	
4	สมการของเส้นโค้ง $y = f(x)$ มีความชันที่จุด (x, y) ใดๆ เท่ากับ $3x^2 - 12$ ถ้าค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับ -17 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ของ f	

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลย แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 13.3

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	ให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นสัมผัสโค้ง เท่ากับ $\frac{6}{x^4}$ และเส้นโค้งดังกล่าวสัมผัสกับเส้นตรง $2x - y - 5 = 0$ ที่จุด $(1, -3)$ จงหาสมการของเส้นโค้ง	$f(x) = \frac{1}{x^2} + 4x - 8$
2	วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง ด้วยความเร่ง 2 ฟุต/วินาที ² ถ้าภายใน 2 วินาที วัตถุดังกล่าวเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 200 ฟุต และที่เวลาเริ่มต้นความเร็วของวัตถุเท่ากับ 30 ฟุต/วินาที จงหาสมการของความเร็วและระยะทางในรูปของเวลา	$v = f'(t) = 2t + 30$ $S = f(t) = t^2 + 30t + 136$
3	จงหาสมการของเส้นโค้งที่ผ่านจุด $P(-1,3)$ และ มีความชันของเส้นสัมผัสที่จุด (x, y) ใดๆ เท่ากับ $2x$	$f(x) = x^2 + 2$
4	สมการของเส้นโค้ง $y = f(x)$ มีความชันที่จุด (x, y) ใดๆ เท่ากับ $3x^2 - 12$ ถ้าค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับ -17 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ของ f	15

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 14

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	ภาคเรียนที่ 1
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น		จำนวน 58 ชั่วโมง
เรื่อง ปริพันธ์จำกัดเขต		จำนวน 2 ชั่วโมง
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/.....	วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ.	คาบที่
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/.....	วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ.	คาบที่

1. มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย ทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2. ตัวชี้วัด

ค 6.1 ม.6/1 ให้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

ค 6.1 ม.6/2 ให้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/3 ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/4 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

ค 6.1 ม.6/5 เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และนำความรู้ หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ

ค 6.1 ม.6/6 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

3. สาระสำคัญ

ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, b]$

แทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)dx$ ซึ่งในการคำนวณอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ บนช่วง $[a, b]$ นั้น จะใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส ส่วนในการคำนวณจะทำให้หาอินทิกรัลจำกัดเขตได้รวดเร็วยิ่งขึ้น และสามารถนำไปใช้ในการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งอีกด้วย

4. จุดประสงค์การเรียนรู้ (K-P-A)

ด้านความรู้ (K): นักเรียนสามารถ

- 1) บอกสัญลักษณ์อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, b]$ ได้
- 2) บอกทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัสได้
- 3) หาอินทิกรัลจำกัดเขตโดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลได้

ด้านทักษะและกระบวนการ (P) : นักเรียนเกิดทักษะดังนี้

- 1) มีการแก้ปัญหา

2) มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

3) มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : นักเรียนสามารถ

1) คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง

2) นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กระตือรือร้น ชัดเจน และตรงประเด็น

3) ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย

5. สารการเรียนรู้

ในการหาอินทิกรัลจำกัดเขตจะใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัสช่วยในการคำนวณ ดังนี้
ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ถ้า F เป็นฟังก์ชันบนช่วง บนช่วง $[a, b]$

โดยที่ $F'(x) = f(x)$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

จากทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส เราจะเขียนสัญลักษณ์

$F(x)|_a^b$ แทน $F(b) - F(a)$

ถ้า $F'(x) = f(x)$ ดังนั้น $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

6. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

6.1 แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ ว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ

- บอกสัญลักษณ์อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, b]$ ได้

- บอกทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัสได้

- หาอินทิกรัลจำกัดเขตโดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลได้

6.2 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต โดยใช้การถาม-ตอบ

ขั้นสอน

6.3 นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 14 แล้วร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการหาอินทิกรัลจำกัดเขต โดยครูคอย
อภิปรายเพิ่มเติมเมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย

ขั้นสรุป

6.4 หลังจากนั้น ให้นักเรียนลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 14

6.5 ครูแจกโจทย์การหาอินทิกรัลจำกัดเขตให้แต่ละกลุ่ม จำนวน 1 ข้อ ให้เวลา 5 นาที กลุ่มใดทำเสร็จก่อนและถูกต้อง
เป็นผู้ชนะ จะได้รับรางวัลจากครูผู้สอน

6.6 ครูชมเชยนักเรียนที่สนใจร่วมกิจกรรมและตั้งใจเรียน เพื่อเป็นการเสริมแรงในการเรียนรู้ของนักเรียน

6.7 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 14 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบ
ความถูกต้องอีกครั้ง ถ้านักเรียนกลุ่มใดทำไม่เสร็จให้ทำเป็นการบ้าน

7. สื่อ / แหล่งการเรียนรู้

7.1 ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

7.2 ห้องสมุดโรงเรียน

7.3 อินเทอร์เน็ต

8. การวัดและประเมินผล (K-P-A)

จุดประสงค์ / การวัดและประเมินผล	วิธีการวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
ความรู้ความเข้าใจ(K):นักเรียนสามารถ. บอกทฤษฎีบทเกี่ยวกับฟังก์ชันลดและ ฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงใดๆ และนำไปใช้ได้ บอกสัญลักษณ์อินทิกรัลจำกัดเขตของ ฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, b]$ ได้ บอกทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัล แคลคูลัสได้ หาอินทิกรัลจำกัดเขตโดยใช้ทฤษฎีบท หลักมูลได้	1. สังเกตจากการตอบ คำถาม 2. สังเกตจากการร่วม กิจกรรม	1. แบบบันทึกการสังเกต 2. แบบฝึกหัด	นักเรียนทุกคนทำถูกต้องไม่ ต่ำกว่าร้อยละ 70 ของ คะแนนทั้งหมด
ด้านทักษะกระบวนการ(P): นักเรียนเกิด ทักษะดังนี้ 1. มีการแก้ปัญหา 2. มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทาง คณิตศาสตร์และการนำเสนอ 3. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	1. สังเกตการทำ กิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การ ประเมินในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะ(A):นักเรียนสามารถ 1. คิดอย่างหลากหลาย มีความคิด ตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงาน อย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง 2. นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กะทัดรัด ชัดเจน และตรงประเด็น 3. ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความ เชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย	1. สังเกตการทำ กิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การ ประเมินในระดับดีขึ้นไป

เกณฑ์การวัดและประเมินผล

เกณฑ์การประเมินผลจากการทำกิจกรรม

ร้อยละ 80 ขึ้นไป หมายถึง ดีมาก

ร้อยละ 70-79 หมายถึง ดี

ร้อยละ 60-69 หมายถึง ปานกลาง

ร้อยละ 50-59 หมายถึง พอใช้

ต่ำกว่า ร้อยละ 50 หมายถึง ปรับปรุง

ผ่านการประเมินตั้งแต่ ร้อยละ ขึ้นไป

9. บูรณาการหลักเศรษฐกิจพอเพียง

1. ผู้สอนใช้หลักเศรษฐกิจพอเพียงในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ประเด็น \ ปศพ	พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
กิจกรรมการเรียนรู้	ก่อนการจัดกิจกรรมมีการวางแผนการเรียนรู้ชัดเจน เป็นลำดับขั้นตอน มีการกำหนดเนื้อหาสาระและกระบวนการเหมาะสมกับนักเรียน ชั้น ม.6	จัดการเรียนรู้ตรงมาตรฐาน ตัวชี้วัดของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มาตรฐานตัวชี้วัด ค 1.1	มีการวางแผนการจัดกิจกรรมที่ชัดเจน เป็นขั้นตอน จากง่ายไปยาก จากรูปธรรมไปหานามธรรม
เวลา	กำหนดเนื้อหาสาระตามมาตรฐาน ตัวชี้วัด ค 5.3 เพื่อให้เหมาะสมกับเวลาเรียน 2 ชั่วโมง นักเรียนทำกิจกรรมตามแผนการจัดการเรียนรู้ได้ทันตามเวลา	กิจกรรมการเรียนรู้บรรลุ ตัวชี้วัดได้ตามเวลาที่กำหนด	มีการถามตอบ ทำให้นักเรียนเข้าใจและทำงานอย่างมีความสุข
สื่อ	จัดเตรียมและใช้สื่อในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ มีแบบฝึกหัดเพียงพอกับนักเรียน	นักเรียนได้เรียนรู้จากง่ายไปหายากและเรียนรู้ด้วยความสุข	สื่อแบบฝึกหัดน่าสนใจและคุ้มค่า
แหล่งเรียนรู้	แหล่งเรียนรู้ที่ใช้เหมาะสมกับเนื้อหาสาระและกิจกรรม	นักเรียนใช้เป็นต้นแบบความคิดและปรับปรุงเป็นของตนเอง สะดวก ใช้งาน	-จัดห้องสื่อทันสมัย -สำรวจข้อมูลจากห้องสมุด -สำรวจข้อมูลจากอินเทอร์เน็ต
ความรู้ที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	-เทคนิควิธีการสอน รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ -ศึกษารูปแบบของแบบฝึก -วิเคราะห์และจัดทำเครื่องมือการวัดและประเมินผล -ศึกษา ค้นคว้าและนำหลักของปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียงมาบูรณาการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้		
คุณธรรม	-มีความรับผิดชอบในการปฏิบัติการสอน เข้าสอนตรงเวลา ปฏิบัติการสอนเต็มเวลา เต็มความสามารถ มีการเตรียมการสอน สื่อและแบบฝึกหัดไว้ล่วงหน้า -มีเมตตา ให้ความเสมอภาคและยุติธรรมกับนักเรียนทุกคน -มีความอดทน เสียสละ ใฝ่รู้ มีน้ำใจ		

คุณลักษณะ “อยู่อย่างพอเพียง”

พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
วางแผนในการทำงานรอบคอบเป็นระบบ และเตรียมอุปกรณ์การเรียนพร้อม	-มีความรู้ สามารถอธิบายการให้เหตุผลและสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาบางอย่างได้ - วิเคราะห์และเลือกวิธีที่สะดวกในการหาคำตอบ -มีความกระตือรือร้น สนใจเข้ากิจกรรม รู้จักการทำงานร่วมกับผู้อื่น	-ฝึกการทำงานโดยใช้ความคิดสร้างสรรค์ของตนเอง -สามารถใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และกระบวนการคิด -วิเคราะห์สาเหตุของการทำแบบฝึกหัดไม่ถูกต้องได้ด้วยตนเอง
ความรู้ (วิธีการ) - เรียนรู้จากแบบฝึกที่เป็นรูปธรรมไปหนามธรรม - เรียนรู้จากแบบฝึกง่ายไปหายาก - สามารถสรุปความคิดได้จากแบบฝึกหัด - ศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมได้จากแหล่งเรียนรู้ที่หลากหลาย ห้องสมุดกลุ่มสาระฯ ห้องสมุดโรงเรียน อินเทอร์เน็ต		
คุณธรรมที่เกิดกับนักเรียน - มีวินัย - ซื่อสัตย์สุจริต - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน - มีจิตสาธารณะ - มีความกระตือรือร้น		

3. ผลลัพธ์ KPA 4 มิติ ที่เกี่ยวข้องกับการอยู่อย่างพอเพียง

ผลลัพธ์	สมดุลและพร้อมต่อการเปลี่ยนแปลงในด้านต่าง ๆ			
	ด้านวัตถุ	ด้านสังคม	ด้านสิ่งแวดล้อม	ด้านวัฒนธรรม
ด้านความรู้	รู้จักกับการให้เหตุผล และสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา	มีความรู้ในการวางแผนการทำงาน		
ด้านทักษะ	สามารถอธิบาย การให้เหตุผล และนำไปใช้แก้ปัญหา	-สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้ -มีทักษะในการปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่นได้		
ด้านค่านิยม	เห็นคุณค่าของการให้เหตุผล	เห็นความสำคัญของการทำงานร่วมกับผู้อื่น		

10. บันทึกการจัดการเรียนรู้

ความคิดเห็นของผู้บริหาร

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ผู้อำนวยการ/รองผู้อำนวยการ/หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้

...../...../.....

บันทึกผลการสอน

1. ผลการสอน

.....

.....

.....

2. ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ

(นายสุเมธ จันทรมบัติ) ผู้สอน

...../...../.....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 14 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 14 ชั่วโมงที่ 36-37 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	--------------------	---

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกสัญลักษณ์อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, b]$ ได้
- 1.2 บอกทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัสได้
- 1.3 หาอินทิกรัลจำกัดเขต โดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัสได้

สาระสำคัญ

ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, b]$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)dx$ ซึ่งในการคำนวณอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ บนช่วง $[a, b]$ นั้น จะใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส ส่วนในการคำนวณจะทำให้หาอินทิกรัลจำกัดเขตได้รวดเร็วยิ่งขึ้น และสามารถนำไปใช้ในการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งอีกด้วย

สาระการเรียนรู้

ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส

ในการหาอินทิกรัลจำกัดเขตจะใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัสช่วยในการคำนวณ ดังนี้

ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ถ้า F เป็นฟังก์ชันบนช่วง $[a, b]$ โดยที่ $F'(x) = f(x)$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

จากทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส เราจะเขียนสัญลักษณ์ $F(x) \Big|_a^b$ แทน $F(b) - F(a)$

ถ้า $F'(x) = f(x)$ ดังนั้น $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\int_0^1 x^2 dx$

วิธีทำ $\because f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องใน $\mathbb{R}$

$\therefore$ ฟังก์ชัน f จึงเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง $[0, 1]$

และเนื่องจากปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x^2$ คือ $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \int_0^1 x^2 dx &= \left(\frac{x^3}{3} + C \right) \Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{3} + C \right) - (0 + C) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int_{-1}^2 (3x^2 - 2x)dx$

วิธีทำ วิธีที่ 1 ให้ $f(x) = 3x^2 - 2x$

$$\begin{aligned} \therefore \text{จะได้ } \int f(x)dx &= \int_{-1}^2 (3x^2 - 2x)dx \\ &= \left(\frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} \right) \\ &= x^3 - x^2 \end{aligned}$$

นั่นคือ $F(x) = x^3 - x^2$

จากโจทย์ $a = -1$ และ $b = 2$

$$\begin{aligned} \text{หา } F(b) &= F(2) \\ &= 2^3 - 2^2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{หา } F(a) &= F(-1) \\ &= (-1)^3 - (-1)^2 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore F(b) - F(a) &= F(2) - F(-1) \\ &= 4 - (-2) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีที่ 2 } \int_{-1}^2 (3x^2 - 2x)dx &= (x^3 - x^2) \Big|_{-1}^2 \\ &= F(2) - F(-1) \\ &= (2^3 - 2^2) - ((-1)^3 - (-1)^2) \\ &= 4 - (-2) \\ &= 6 \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

สรุป วิธีการหาอินทิกรัลจำกัดเขต (ปริพันธ์จำกัดเขต) ทำได้ดังนี้

1. หา $F(x)$ โดยการนำ $f(x)$ ไปหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต แต่ไม่ต้องมาบวกค่าคงตัว

$$\int f(x)dx = F(x) \quad \text{หรือ} \quad F'(x) = f(x)$$

2. เมื่อได้ $F(x)$ จากข้อ 1 แล้วให้นำค่า a และ b ไปแทนในฟังก์ชัน $F(x)$ และคำนวณค่า $F(b) - F(a)$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 14 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 14 ชั่วโมงที่ 36-37 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	-------------	--

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.1-1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนหาอินทิกรัลจำกัดเขตแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	จงหา $\int_{-2}^2 (2x - 1)dx$	
2	จงหา $\int_{-1}^2 (x^2 - 4x)dx$	
3	จงหา $\int_{-2}^2 (x^2 + 3x - 4)dx$	
4	จงหา $\int_{-3}^1 (3x^2 - x + 4)dx$	
5	จงหา $\int_1^3 (x^2 - 2x + 3)dx$	
6	จงหา $\int_{-1}^1 (-x^4 + x^2 - 1)dx$	
7	จงหา $\int_1^3 (3x^2 + x - 2)dx$	

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลย แบบฝึกทักษะที่ 14

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	จงหา $\int_{-2}^2 (2x - 1)dx$	-4
2	จงหา $\int_{-1}^2 (x^2 - 4x)dx$	-3
3	จงหา $\int_{-2}^2 (x^2 + 3x - 4)dx$	$-\frac{56}{3}$
4	จงหา $\int_{-3}^1 (3x^2 - x + 4)dx$	$9\frac{1}{2}$
5	จงหา $\int_1^3 (x^2 - 2x + 3)dx$	$\frac{20}{3}$
6	จงหา $\int_{-1}^1 (-x^4 + x^2 - 1)dx$	$-\frac{4}{3}$
7	จงหา $\int_1^3 (3x^2 + x - 2)dx$	26

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 15

รายวิชา ค 33205 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	ภาคเรียนที่ 1
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น		จำนวน 58 ชั่วโมง
เรื่อง พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง		จำนวน 4 ชั่วโมง
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/.....	วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ.	คาบที่
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6/.....	วัน.....ที่ เดือน..... พ.ศ.	คาบที่

1. มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย ทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2. ตัวชี้วัด

ค 6.1 ม.6/1 ให้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

ค 6.1 ม.6/2 ให้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/3 ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.6/4 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

ค 6.1 ม.6/5 เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และนำความรู้ หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ

ค 6.1 ม.6/6 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

3. สาระสำคัญ

พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของ $y = f(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$ หมายถึง พื้นที่ของอาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน X เส้นตรง $x = a$ และเส้นตรง $x = b$

4. จุดประสงค์การเรียนรู้ (K-P-A)

ด้านความรู้ (K): นักเรียนสามารถ

- 1) บอกความหมายของพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้
- 2) บอกสัญลักษณ์ที่ใช้แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้
- 3) หาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

ด้านทักษะและกระบวนการ (P) : นักเรียนเกิดทักษะดังนี้

- 1) มีการแก้ปัญหา
- 2) มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ
- 3) มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : นักเรียนสามารถ

- 1) คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง
- 2) นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กะทัดรัด ชัดเจน และตรงประเด็น
- 3) ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย

5. สารการเรียนรู้

การหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$ สามารถหาได้โดยอาศัยบทนิยามดังนี้
 บทนิยาม เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ A เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของ f จาก $x = a$ ถึง $x = b$

1. ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ แล้ว A เป็นพื้นที่เหนือแกน X และ

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

2. . ถ้า $f(x) \leq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ แล้ว A เป็นพื้นที่เหนือแกน X และ

$$A = - \int_a^b f(x)dx$$

6. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

6.1 แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ ว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ

- บอกความหมายของพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้
- บอกสัญลักษณ์ที่ใช้แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้
- หาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

6.2 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอินทิกรัลจำกัดเขต โดยใช้การถาม-ตอบ

ขั้นสอน

6.3 นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 15 แล้วร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับวิธีการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง โดยครูคอยอภิปรายเพิ่มเติมเพื่อให้มีความถูกต้องยิ่งขึ้น

ขั้นสรุป

6.4 หลังจากนั้น ให้นักเรียนลงในแบบแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 15

6.5 ครูยกตัวอย่าง 2-3 ตัวอย่าง บนกระดานแล้วให้นักเรียนช่วยกันหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง เพื่อเป็นการตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนอีกครั้ง

6.6 นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 15 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง เพื่อจะได้ทราบข้อบกพร่องของนักเรียน

6.7 นักเรียนแต่ละกลุ่มจัดทำ Mind Map เรื่อง การอินทิเกรต เป็นผลงานของกลุ่ม ส่งครูนอกเวลาเรียน

6.8 ครูซักถามปัญหาต่างๆ ในการเรียน เรื่อง อินทิเกรต ของนักเรียนว่ามีปัญหา ข้อสงสัยในเรื่องใดบ้าง เพื่อจะได้ทราบข้อบกพร่องของนักเรียนและจะได้หาวิธีแก้ไขปรับปรุงพัฒนาการเรียนการสอนให้ดียิ่งขึ้น

6.9 นักเรียนแต่ละกลุ่มทำเอกสารฝึกหัดทบทวน รหัสที่ 15 ที่ครูแจกให้แล้วร่วมกันสรุปปัญหาที่สงสัยในแต่ละเรื่อง เตรียมนำเสนอหน้าชั้นเรียน

6.10 นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ เรื่อง การอินทิเกรต เพื่อประเมินความก้าวหน้าของนักเรียนหลังจากการเรียนจบหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 (แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13-15)

7. สื่อ / แหล่งการเรียนรู้

7.1 ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

7.2 ห้องสมุดโรงเรียน

7.3 อินเทอร์เน็ต

8. การวัดและประเมินผล (K-P-A)

จุดประสงค์ \ การวัดและประเมินผล	วิธีการวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
ความรู้ความเข้าใจ(K):นักเรียนสามารถบอกความหมายของพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้ บอกสัญลักษณ์ที่ใช้แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้ หาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้	1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	1. แบบบันทึกการสังเกต 2. แบบฝึกหัด	นักเรียนทุกคนทำถูกต้องไม่ต่ำกว่าร้อยละ 70 ของคะแนนทั้งหมด
ด้านทักษะกระบวนการ(P): นักเรียนเกิดทักษะดังนี้ 1. มีการแก้ปัญหา 2. มีการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ 3. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะ(A):นักเรียนสามารถ 1. คิดอย่างหลากหลาย มีความคิดตามลำดับเหตุผล มีความรอบคอบ ทำงานอย่างมีหลักการ และเชื่อมั่นในตนเอง 2. นำเสนอให้ผู้อื่นเข้าใจได้ กะทัดรัด ชัดเจน และตรงประเด็น 3. ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์ ความเชื่อมั่นในตนเอง ระเบียบวินัย	1. สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	1. แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนผ่านเกณฑ์การประเมินในระดับดีขึ้นไป

เกณฑ์การวัดและประเมินผล

เกณฑ์การประเมินผลจากการทำกิจกรรม

ร้อยละ 80 ขึ้นไป หมายถึง ดีมาก

ร้อยละ 70-79 หมายถึง ดี

ร้อยละ 60-69 หมายถึง ปานกลาง

ร้อยละ 50-59 หมายถึง พอใช้

ต่ำกว่า ร้อยละ 50 หมายถึง ปรับปรุง

ผ่านการประเมินตั้งแต่ ร้อยละ ขึ้นไป

9. บูรณาการหลักเศรษฐกิจพอเพียง

1. ผู้สอนใช้หลักเศรษฐกิจพอเพียงในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ประเด็น \ ปศพ	พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
กิจกรรมการเรียนรู้	ก่อนการจัดกิจกรรมมีการวางแผนการเรียนรู้ชัดเจน เป็นลำดับขั้นตอน มีการกำหนดเนื้อหาสาระและกระบวนการเหมาะสมกับนักเรียน ชั้น ม.6	จัดการเรียนรู้ตรงมาตรฐาน ตัวชี้วัดของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มาตรฐานตัวชี้วัด ค 1.1	มีการวางแผนการจัดกิจกรรมที่ชัดเจน เป็นขั้นตอน จากง่ายไปยาก จากรูปธรรมไปหานามธรรม
เวลา	กำหนดเนื้อหาสาระตามมาตรฐาน ตัวชี้วัด ค 5.3 เพื่อให้เหมาะสมกับเวลาเรียน 2 ชั่วโมง นักเรียนทำกิจกรรมตามแผนการจัดการเรียนรู้ได้ทันตามเวลา	กิจกรรมการเรียนรู้บรรลุ ตัวชี้วัดได้ตามเวลาที่กำหนด	มีการถามตอบ ทำให้นักเรียนเข้าใจและทำงานอย่างมีความสุข
สื่อ	จัดเตรียมและใช้สื่อในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ มีแบบฝึกหัดเพียงพอกับนักเรียน	นักเรียนได้เรียนรู้จากง่ายไปหายากและเรียนรู้ด้วยความสุข	สื่อแบบฝึกหัดน่าสนใจและคุ้มค่า
แหล่งเรียนรู้	แหล่งเรียนรู้ที่ใช้เหมาะสมกับเนื้อหาสาระและกิจกรรม	นักเรียนใช้เป็นต้นแบบความคิดและปรับปรุงเป็นของตนเอง สะดวก ใช้งาน	-จัดห้องสื่อทันสมัย -สำรวจข้อมูลจากห้องสมุด -สำรวจข้อมูลจากอินเทอร์เน็ต
ความรู้ที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	-เทคนิควิธีการสอน รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ -ศึกษารูปแบบของแบบฝึก -วิเคราะห์และจัดทำเครื่องมือการวัดและประเมินผล -ศึกษา ค้นคว้าและนำหลักของปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียงมาบูรณาการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้		
คุณธรรม	-มีความรับผิดชอบในการปฏิบัติการสอน เข้าสอนตรงเวลา ปฏิบัติการสอนเต็มเวลา เต็มความสามารถ มีการเตรียมการสอน สื่อและแบบฝึกหัดไว้ล่วงหน้า -มีเมตตา ให้ความเสมอภาคและยุติธรรมกับนักเรียนทุกคน -มีความอดทน เสียสละ ใฝ่รู้ มีน้ำใจ		

คุณลักษณะ “อยู่อย่างพอเพียง”

พอประมาณ	มีเหตุผล	มีภูมิคุ้มกันในตัวที่ดี
วางแผนในการทำงานรอบคอบเป็นระบบ และเตรียมอุปกรณ์การเรียนพร้อม	-มีความรู้ สามารถอธิบายการให้เหตุผลและสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาบางอย่างได้ - วิเคราะห์และเลือกวิธีที่สะดวกในการหาคำตอบ -มีความกระตือรือร้น สนใจเข้ากิจกรรม รู้จักการทำงานร่วมกับผู้อื่น	-ฝึกการทำงานโดยใช้ความคิดสร้างสรรค์ของตนเอง -สามารถใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และกระบวนการคิด -วิเคราะห์สาเหตุของการทำแบบฝึกหัดไม่ถูกต้องได้ด้วยตนเอง
ความรู้ (วิธีการ) - เรียนรู้จากแบบฝึกที่เป็นรูปธรรมไปหนามธรรม - เรียนรู้จากแบบฝึกง่ายไปหายาก - สามารถสรุปความคิดได้จากแบบฝึกหัด - ศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมได้จากแหล่งเรียนรู้ที่หลากหลาย ห้องสมุดกลุ่มสาระฯ ห้องสมุดโรงเรียน อินเทอร์เน็ต		
คุณธรรมที่เกิดกับนักเรียน - มีวินัย - ซื่อสัตย์สุจริต - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน - มีจิตสาธารณะ - มีความกระตือรือร้น		

3. ผลลัพธ์ KPA 4 มิติ ที่เกี่ยวข้องกับการอยู่อย่างพอเพียง

ผลลัพธ์	สมดุลและพร้อมต่อการเปลี่ยนแปลงในด้านต่าง ๆ			
	ด้านวัตถุ	ด้านสังคม	ด้านสิ่งแวดล้อม	ด้านวัฒนธรรม
ด้านความรู้	รู้จักกับการให้เหตุผล และสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา	มีความรู้ในการวางแผนการทำงาน		
ด้านทักษะ	สามารถอธิบาย การให้เหตุผล และนำไปใช้แก้ปัญหา	-สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้ -มีทักษะในการปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่นได้		
ด้านค่านิยม	เห็นคุณค่าของการให้เหตุผล	เห็นความสำคัญของการทำงานร่วมกับผู้อื่น		

10. บันทึกการจัดการเรียนรู้

ความคิดเห็นของผู้บริหาร

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ผู้อำนวยการ/รองผู้อำนวยการ/หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้

...../...../.....

บันทึกผลการสอน

1. ผลการสอน

.....

.....

.....

2. ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ

(นายสุเมธ จันทรมบัติ) ผู้สอน

...../...../.....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัส เอกสารประกอบการสอนที่ 15 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 15 ชั่วโมงที่ 38-39 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	--------------------	---

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกความหมายของพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้
- 1.2 บอกสัญลักษณ์ที่ใช้แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้
- 1.3 หาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

สาระสำคัญ

พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของ $y = f(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$ หมายถึง พื้นที่ของอาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน X เส้นตรง $x = a$ และเส้นตรง $x = b$

สาระการเรียนรู้

พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

การหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$ สามารถหาได้โดยอาศัยบทนิยามดังนี้
บทนิยาม เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ A เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของ f จาก $x = a$ ถึง $x = b$

1. ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ แล้ว A เป็นพื้นที่เหนือแกน X และ

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

2. . ถ้า $f(x) \leq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ แล้ว A เป็นพื้นที่เหนือแกน X และ

$$A = - \int_a^b f(x)dx$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 9 - x^2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 3$

วิธีทำ ให้ A แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 9 - x^2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 3$ $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก x ในช่วง $[0, 3]$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } A &= \int_0^3 (9 - x^2)dx \\
 &= \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 \\
 &= \left[9(3) - \frac{3^3}{3} \right] - \left[9(0) - \frac{0^3}{3} \right] \\
 &= (27 - 9) - 0 \\
 &= 18 \text{ ตารางหน่วย}
 \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 2x - 15$ จาก $x = -2$ ถึง $x = 2$

วิธีทำ ให้ A เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 2x - 15$ จาก $x = -2$ ถึง $x = 2$ และ

$f(x) \leq 0$ สำหรับทุก x ในช่วง $[-2, 2]$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{จะได้ } A &= -\int_a^b f(x)dx \\
 &= -\int_{-2}^2 (x^2 + 2x - 15)dx \\
 &= -\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 15x\right)\bigg|_{-2}^2 \\
 &= -\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 15x\right)\bigg|_{-2}^2 \\
 &= -\left\{\left[\frac{2^3}{3} + 2^2 - 15(2)\right] - \left[\frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 - 15(-2)\right]\right\} \\
 &= -\left[\frac{16}{3} - 60\right] \\
 &= \frac{164}{3} \qquad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 4x - x^2$ จาก $x = 1$ ถึง $x = 3$

วิธีทำ ให้ A เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 4x - x^2$ จาก $x = 1$ ถึง $x = 3$

และ $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก x ในช่วง $[1, 3]$

$$\begin{aligned}
 \therefore A &= \int_1^3 (4x - x^2)dx \\
 &= \left(\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_1^3 \\
 &= \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_1^3 \\
 &= \left[2(3)^2 - \frac{(3)^3}{3}\right] - \left[2(1)^2 - \frac{(1)^3}{3}\right] \\
 &= (18 - 9) - \left(2 - \frac{1}{3}\right) \\
 &= \frac{22}{3} \quad \text{ตารางหน่วย} \qquad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัส แบบฝึกทักษะที่ 15 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 15 ชั่วโมงที่ 38-39 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	-------------	--

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 1.1-1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนหาอินทิกรัลจำกัดเขตแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	จงหาพื้นที่ที่ปิดด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ จาก $x = -3$ ถึง $x = 0$	
2	จงหาพื้นที่ที่ปิดด้วยเส้นโค้ง $y = x + 1$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 1$	
3	จงหาพื้นที่ที่ปิดด้วยเส้นโค้ง $y = 6 + x - x^2$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 1$	
4	จงหาพื้นที่ที่ปิดด้วยเส้นโค้ง $y = 9 - x^2$ จาก $x = -3$ ถึง $x = 3$	
5	จงหาพื้นที่ที่ปิดด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 25$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 3$	
6	จงหาพื้นที่ที่ปิดด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + x + 1$ จาก $x = 2$ ถึง $x = 3$	
7	จงหาพื้นที่ที่ปิดด้วยเส้นโค้ง $y = 3x^2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 1$	

คะแนนที่ได้	ชื่อ
ผู้ตรวจ	นามสกุล
วันที่ เดือน พ.ศ.	ชั้น เลขที่

เฉลย แบบฝึกหัดที่ 14

ข้อ	คำถาม	คำตอบ
1	จงหาพื้นที่ที่ปิดด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ จาก $x = -3$ ถึง $x = 0$	9 ตารางหน่วย
2	จงหาพื้นที่ที่ปิดด้วยเส้นโค้ง $y = x + 1$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 1$	2 ตารางหน่วย
3	จงหาพื้นที่ที่ปิดด้วยเส้นโค้ง $y = 6 + x - x^2$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 1$	$\frac{34}{3}$ ตารางหน่วย
4	จงหาพื้นที่ที่ปิดด้วยเส้นโค้ง $y = 9 - x^2$ จาก $x = -3$ ถึง $x = 3$	36 ตารางหน่วย
5	จงหาพื้นที่ที่ปิดด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 25$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 3$	$\frac{272}{3}$ ตารางหน่วย
6	จงหาพื้นที่ที่ปิดด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + x + 1$ จาก $x = 2$ ถึง $x = 3$	$\frac{59}{6}$ ตารางหน่วย
7	จงหาพื้นที่ที่ปิดด้วยเส้นโค้ง $y = 3x^2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 1$	1 ตารางหน่วย

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบสรุปเนื้อหา	รหัส แบบสรุปเนื้อหาที่ 15 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 15 ชั่วโมงที่ 38-39 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
--	----------------	---

คำชี้แจง ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาจากเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 13 ตามหัวข้อต่อไปนี้

1. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$ หมายถึง

.....

.....

.....

.....

2. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง f จาก $x = a$ ถึง $x = b$ ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ จะหาพื้นที่ได้จาก

$A =$

4. . พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง f จาก $x = a$ ถึง $x = b$ ถ้า $f(x) \leq 0$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ จะหาพื้นที่ได้จาก

$A =$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33205 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์	หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น เรื่อง การอินทิเกรต เวลา 1 ชั่วโมง
--	---------------------------	---

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำ ทุกข้อ

1) จงหา $\int (5x^3 - 6x^2 + 2x + 2) dx$

2) กำหนดให้ $f''(x) = 2x + 1$ และ $f'(1) = 4$, $f(0) = 5$ จงหา $f(x)$

3) จงหาสมการเส้นโค้ง $y = f(x)$ เมื่อกำหนดความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใดๆ เป็น $x^2 - 3x + 2$ และผ่านจุด $(2, 1)$

4) จงหา $\int_{-1}^2 (6x^2 + 1) dx$