



# แผนการจัดการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

## รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5



**ภัทรพร ดลเจือ**

ตำแหน่งครู วิทยฐานะครูชำนาญการ

**โรงเรียนสตรีศึกษา**

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

จำนวน 30 ชั่วโมง

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

จำนวน 4 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

### ผลการเรียนรู้

เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนและใช้สมบัติจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) สามารถบอกส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนได้ (K)
- 2) มีความสามารถในการสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การเขียนจำนวนเชิงซ้อนและการนำเสนอ อภิปรายบทนิยามของจำนวนเชิงซ้อนได้ (P)
- 3) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

### สาระการเรียนรู้

จำนวนเชิงซ้อนและสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน

### สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

จำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนที่เขียนอยู่ในรูป  $z = a + bi$

เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงใดๆ และ  $i = \sqrt{-1}$

เรียก  $a$  ว่า ส่วนจริง (real part) ของ  $z$  และเขียนแทนด้วย  $\text{Re}(z)$

เรียก  $b$  ว่า ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ  $z$  และเขียนแทนด้วย  $\text{Im}(z)$

### สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร	1. มีวินัย
2. ความสามารถในการคิด	2. ใฝ่เรียนรู้
1) ทักษะการระบุ	3. มุ่งมั่นในการทำงาน
2) ทักษะการคิดคล่อง	
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	

## กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching

### ชั่วโมงที่ 1

#### ขั้นนำ

##### ขั้นการใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

1. ครูแจกใบงานที่ 1.1.1 เรื่อง แผนผังของจำนวนจริง เมื่อนักเรียนทำใบงานเสร็จแล้ว ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบที่ถูกต้อง
2. ครูให้นักเรียนพิจารณา สมการพหุนามบางสมการในระบบจำนวนจริง เช่น  $x^2 + 1 = 0$  และให้นักเรียนช่วยกันหาคำตอบของสมการพหุนาม  $x^2 + 1 = 0$  จะได้ว่า

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1} \text{ ซึ่งไม่ใช่จำนวนจริง}$$

จะเห็นได้ชัดว่าไม่มีจำนวนจริง  $x$  ใดๆ ที่ทำให้สมการเป็นจริง จึงกล่าวได้ว่า สมการพหุนาม  $x^2 + 1 = 0$  ไม่มีคำตอบของสมการที่เป็นจำนวนจริง เพื่อให้สมการพหุนามนี้มีคำตอบ จึงมีการสร้างระบบจำนวนเชิงซ้อนขึ้นเพื่อให้สมการพหุนามทั้งหมดมีคำตอบทั้งที่เป็นจำนวนจริงและไม่ใช่จำนวนจริง

#### ขั้นสอน

##### ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูอธิบายให้นักเรียนได้เข้าใจว่า เมื่อกำหนดให้  $\sqrt{-1}$  แทนด้วยสัญลักษณ์  $i$  (มาจาก imaginan) จำนวน
2. ให้นักเรียนพิจารณาว่า จำนวนจินตภาพอื่นๆ เช่น  $\sqrt{-2}$ ,  $\sqrt{-3}$ ,  $\sqrt{-4}$  เป็นต้น จะเขียนในรูป  $ci$  ได้อย่างไร

(แนวคำตอบ:  $\sqrt{-2} = \sqrt{2} \times \sqrt{-1} = \sqrt{2}i$

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1} = \sqrt{3}i$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = \sqrt{4}i = 2i)$$

ดังนั้นจำนวนในวิชาคณิตศาสตร์จึงสามารถมีได้ทั้งจำนวนจริงและจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนจริงหรือจำนวนจินตภาพ (imaginary number) รวมจำนวนทั้งสองชนิด เรียกว่า “จำนวนเชิงซ้อน” นิยมเขียนอยู่ในรูป

$$z = a + bi \text{ หรือ } (a,b) \quad \text{เมื่อ } a \text{ และ } b \text{ เป็นจำนวนจริงใดๆ และ } i = \sqrt{-1}$$

เรียก  $a$  ว่า ส่วนจริง (real part) ของ  $z$  และเขียนแทนด้วย  $\text{Re}(z)$

เรียก  $b$  ว่า ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ  $z$  และเขียนแทนด้วย  $\text{Im}(z)$

3. ครูยกตัวอย่างจำนวน  $1 + i$  ,  $-4i$  ,  $-3 - 2i$  ,  $5.5$  แล้วให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาว่า

- จำนวนใดบ้างที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน

(แนวคำตอบ: ทุกจำนวนเป็นจำนวนเชิงซ้อน)

- ให้นักเรียนบอกส่วนจริง ส่วนจินตภาพและจำนวนจินตภาพของแต่ละจำนวน

(แนวคำตอบ:

จำนวน	ส่วนจริง	ส่วนจินตภาพ	จำนวนจินตภาพ
$1 + i$	1	1	$i$
$-4i$	0	-4	$-4i$
$-3 - 2i$	-3	-2	$-2i$
5.5	5.5	0	0

3. จากการยกตัวอย่างจำนวนในข้อ 3 ครูอธิบายให้นักเรียนได้เข้าใจว่าจำนวนที่มีแต่จำนวนจินตภาพเพียงอย่างเดียว เช่น  $-4i$  เราเรียกว่า “จำนวนจินตภาพแท้”

4. ครูเขียนบทนิยามของจำนวนเชิงซ้อนบนกระดาน และขยายความของบทนิยามให้นักเรียนเข้าใจมากยิ่งขึ้น

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

5. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นสุ่มนักเรียนออกนำเสนอคำตอบหน้าชั้นเรียน โดยครูตรวจสอบความถูกต้อง

6. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน แล้วช่วยกันหาคำตอบในแบบฝึกทักษะ 1.1 ข้อ 1-3 ระดับพื้นฐาน จากนั้นให้นักเรียนจับคู่กับกลุ่มอื่น เพื่อแลกเปลี่ยนกันตรวจคำตอบและร่วมกันอภิปรายคำตอบที่นักเรียนตอบไม่ตรงกัน โดยครูคอยสังเกตและให้คำแนะนำกับนักเรียน

## ชั่วโมงที่ 2

### ขั้นรู้ (Knowing)

8. ครูให้นักเรียนพิจารณาหาค่าของ  $i$  ยกกำลัง  $n$  ดังนี้

$$\text{จากนิยาม } i^0 = 1$$

$$\text{และ } i = i$$

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$$

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$$

จะเห็นว่าค่าของ  $i^n$  มีความสัมพันธ์ระหว่างผลหารและเศษของการหาร  $n$  ด้วย 4 จึงสรุปค่าของ  $i^n$  ดังนี้

$$i^n = 1 \quad \text{เมื่อ } n \div 4 \text{ แล้วเหลือเศษ } 0 \text{ (หารลงตัว)}$$

$$i^n = i \quad \text{เมื่อ } n \div 4 \text{ แล้วเหลือเศษ } 1$$

$$i^n = -1 \quad \text{เมื่อ } n \div 4 \text{ แล้วเหลือเศษ } 2$$

$$i^n = -i \quad \text{เมื่อ } n \div 4 \text{ แล้วเหลือเศษ } 3$$

9. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 3 จากหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน เรื่อง การบวกลบที่อยู่ในรูป  $i$  ยกกำลัง  $n$

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

10. ครูให้แต่ละคนนักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน เพื่อตรวจสอบความเข้าใจเรื่องการบวกลบที่อยู่ในรูป  $i$  ยกกำลัง  $n$  แล้วสุ่มนักเรียนเฉลยคำตอบ โดยครูตรวจสอบความถูกต้อง

11. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 3 คน แล้วช่วยกันหาคำตอบในแบบฝึกทักษะ 1.1 ข้อ 4 แล้วนักเรียนและครูร่วมกันเฉลยคำตอบที่ถูกต้อง

## ชั่วโมงที่ 3

### ขั้นรู้ (Knowing)

12. ครูให้นักเรียนพิจารณาการหาผลบวกของ  $i$  ยกกำลัง  $n$  เมื่อ  $n$  แทนจำนวนนับใด ๆ เช่น ผลบวกของ

$$i + i^2 + i^3 + i^4 = i + (-1) + (-i) + 1 = 0$$

$$i^2 + i^3 + i^4 + i^5 = (-1) + (-i) + 1 + i = 0$$

13. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาความสัมพันธ์ของผลบวกของ  $i$  ยกกำลัง  $n$  ที่เรียงลำดับ จะพบว่า “ผลบวก ของ  $i^n$  4 จำนวนที่เรียงลำดับต่อกันจะรวมกันได้เท่ากับ 0 เสมอ”

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

14. ครูให้นักเรียนจับคู่กัน แล้วช่วยกันทำแบบฝึกทักษะ 1.1 ข้อ 5 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นนักเรียนและครูร่วมกันเฉลยคำตอบบนกระดาน

## ชั่วโมงที่ 4

### ขั้นรู้ (Knowing)

15. ครูให้นักเรียนพิจารณาการหาผลคูณของ  $i$  ยกกำลัง  $n$  เมื่อ  $n$  แทนจำนวนนับใด ๆ เช่น ผลคูณของ

$$i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 = (i)(-1)(-i)(1) = -1$$

$$i^3 \cdot i^4 \cdot i^5 \cdot i^6 = (-i)(1)(i)(-1) = -1$$

16. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาความสัมพันธ์ของผลคูณของ  $i$  ยกกำลัง  $n$  ที่เรียงลำดับ จะพบว่า “ผลคูณของ  $i$ ” 4 จำนวนที่เรียงลำดับต่อกันจะมีผลคูณเท่ากับ  $-1$  เสมอ”

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

17. ครูให้นักเรียนจับคู่และแต่ละคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 4 จากหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง จากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน แล้วครูสุ่มนักเรียนที่ละคู่ให้เฉลยคำตอบบนกระดาน โดยครูตรวจสอบความถูกต้อง

### ขั้นลงมือทำ (Doing)

18. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 3 คน แล้วร่วมกันทำแบบฝึกทักษะ 1.1 ข้อ 6 ระดับท้าทาย ในหนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน และครูสุ่มเลือกนักเรียน 1 กลุ่มออกมานำเสนอแนวคิดในการหาคำตอบ

### ขั้นสรุป

1. ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- จำนวนเชิงซ้อนมีกี่ส่วนประกอบด้วยอะไรบ้าง

(แนวคำตอบ : 2 ส่วนคือ ส่วนจริงและส่วนจินตภาพ)

- การเขียนจำนวนเชิงซ้อนสามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์แบบใด

(แนวคำตอบ : จำนวนเชิงซ้อนใด ๆ แทนด้วย  $z$  เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จำนวนจริงแทน ด้วย  $a$  จำนวนจินตภาพแทนด้วย  $bi$  ดังนั้น  $z = a + bi$  หรือ  $(a, b)$ )

- กำหนดให้  $z = 2 - 3i$  ให้นักเรียนระบุส่วนจริงและส่วนจินตภาพ

(แนวคำตอบ : ส่วนจริงคือ 2 และส่วนจินตภาพคือ 3 )

- การหาค่าของ  $i$  ยกกำลัง  $n$  ทำได้อย่างไร

(แนวคำตอบ :  $i^n = 1$  เมื่อ  $n \div 4$  แล้วเหลือเศษ 0 (หารลงตัว)

$$i^n = i \quad \text{เมื่อ } n \div 4 \text{ แล้วเหลือเศษ 1}$$

$$i^n = -1 \quad \text{เมื่อ } n \div 4 \text{ แล้วเหลือเศษ 2}$$

$$i^n = -i \quad \text{เมื่อ } n \div 4 \text{ แล้วเหลือเศษ 3 )}$$

- ผลบวกและผลคูณของ  $i$  ยกกำลัง  $n$  ที่เรียงลำดับติดกัน 4 จำนวนมีความสัมพันธ์อย่างไร

(แนวคำตอบ “ผลบวกของ  $i^n$  4 จำนวนที่เรียงลำดับต่อกันจะรวมกันได้เท่ากับ 0 เสมอ”

และ “ผลคูณ ของ  $i^n$  4 จำนวนที่เรียงลำดับต่อกันจะมีผลคูณเท่ากับ -1 เสมอ” )

## การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
1. การประเมินก่อนเรียน - แบบทดสอบก่อนเรียน หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน	- ตรวจสอบแบบทดสอบ ก่อนเรียน	- แบบทดสอบก่อน เรียน	- ประเมินตามสภาพ จริง
2. ประเมินระหว่างการจัด กิจกรรมการเรียนรู้			
1) จำนวนเชิงซ้อน	- ตรวจสอบใบงานที่ 1.1.1 - ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ1.1	- ใบงานที่ 1.1.1 - แบบฝึกทักษะ 1.1	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) นำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน	- แบบประเมินการ นำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่น ในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

## สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

### สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน
- 3) ใบงานที่ 1.1.1 เรื่อง แผนผังของจำนวนจริง

### แหล่งการเรียนรู้

-

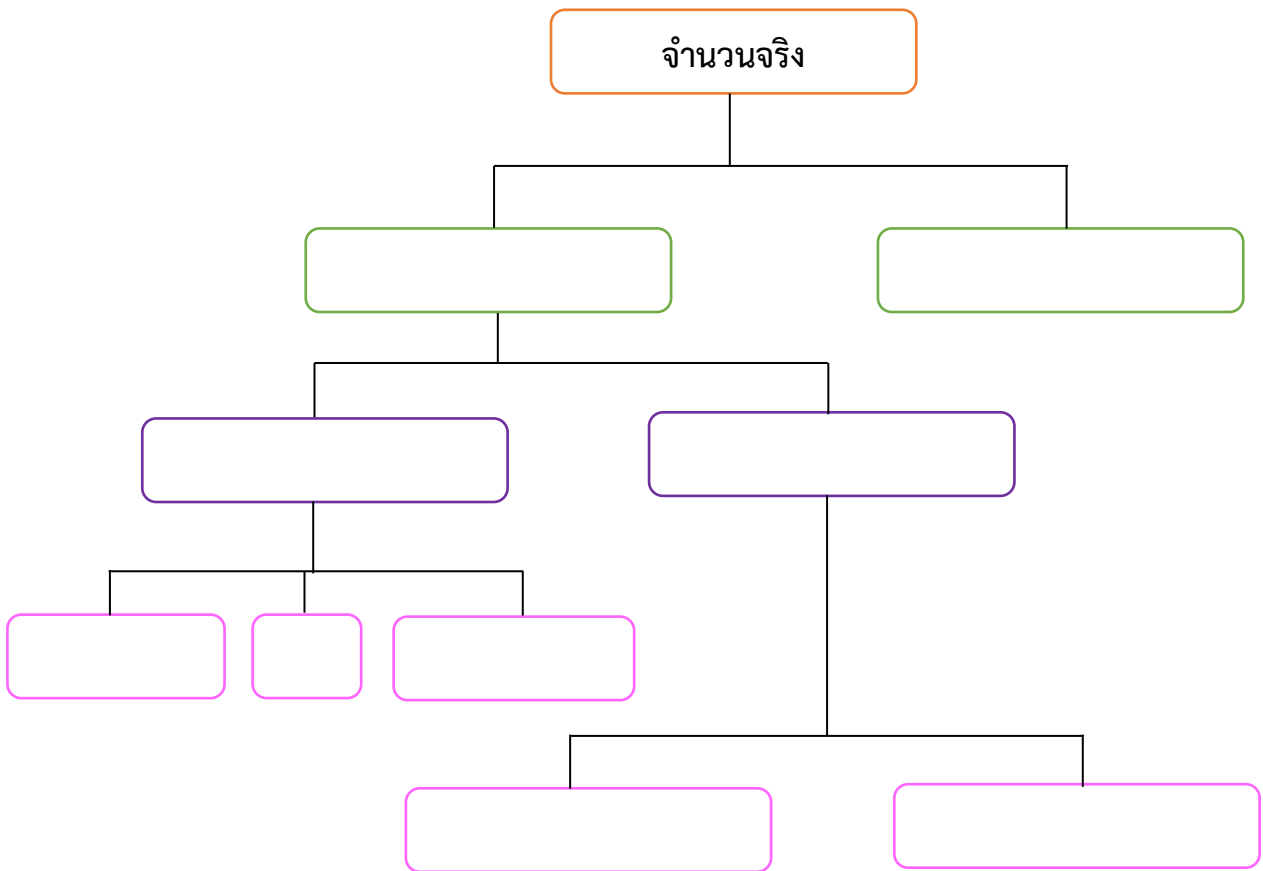


## ใบงานที่ 1.1.1

### เรื่อง แผนผังของจำนวนจริง

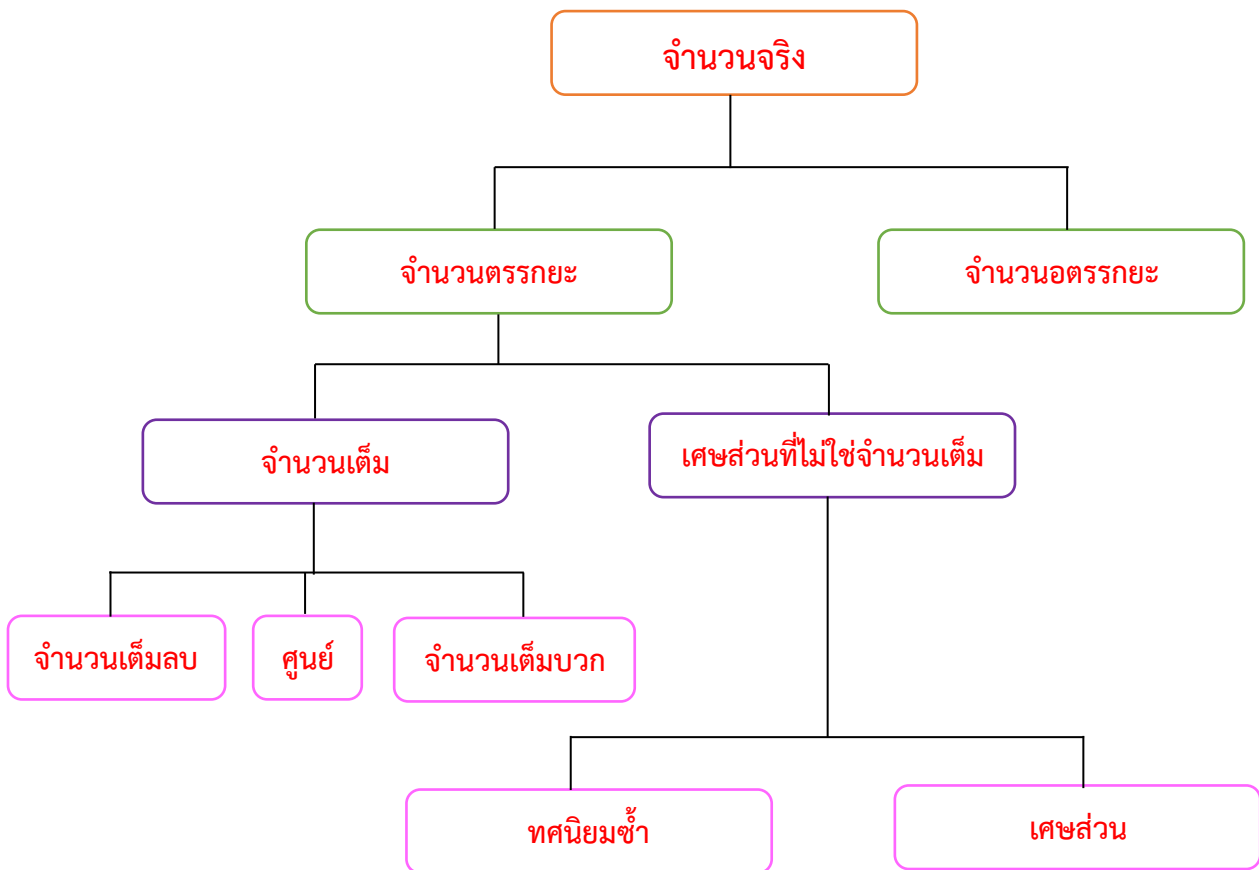
---

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนเติมช่องว่างในแผนผังของจำนวนจริงให้สมบูรณ์



เรื่อง แผนผังของจำนวนจริง

คำชี้แจง : ให้นักเรียนเติมช่องว่างในแผนผังของจำนวนจริงให้สมบูรณ์



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

จำนวน 30 ชั่วโมง

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

จำนวน 5 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

### ผลการเรียนรู้

เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนและใช้สมบัติจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) บอกสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนได้ (K)
- 2) แก้ปัญหาโดยใช้สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนได้ (P)
- 3) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

### สาระการเรียนรู้

จำนวนเชิงซ้อนและสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน

### สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

#### 1. สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

สมบัติ กำหนด  $z_1 = a + bi$  และ  $z_2 = c + di$  เมื่อ  $a, b, c$  และ  $d$  เป็นจำนวนจริง จะกล่าวได้ว่า

1.  $z_1 = z_2$  หรือ  $a + bi = c + di$  ก็ต่อเมื่อ  $a = c$  และ  $b = d$
2.  $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
3.  $kz_1 = k(a + bi) = ka + kbi$  เมื่อ  $k$  เป็นค่าคงตัว
4.  $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di)$   
 $= ac + adi + bci + bdi^2$   
 $= (ac - bd) + (ad + bc)i$

#### 2. สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวกของจำนวนเชิงซ้อน

สมบัติ 1. สมบัติปิดของการบวก

ถ้า  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว  $z_1 + z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน

2. สมบัติการสลับที่ของการบวก

ถ้า  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

3. สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการบวก

ถ้า  $z_1, z_2$  และ  $z_3$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

#### 4. สมบัติการมีเอกลักษณ์ของการบวก

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน  $a + bi$  ใด ๆ เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง  
จะมีจำนวนเชิงซ้อน  $0 + 0i$  ซึ่ง

$$(a + bi) + (0 + 0i) = a + bi$$

$$\text{และ } (0 + 0i) + (a + bi) = a + bi$$

เรียกจำนวนเชิงซ้อน  $0 + 0i$  ว่า เอกลักษณ์ของการบวกของจำนวนเชิงซ้อน

#### 5. สมบัติการมีตัวผกผันของการบวก

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน  $a + bi$  ใด ๆ เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง  
จะมีจำนวนเชิงซ้อน  $-a - bi$  ซึ่ง

$$(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i$$

$$\text{และ } (-a - bi) + (a + bi) = 0 + 0i$$

เรียกจำนวนเชิงซ้อน  $-a - bi$  ว่า ตัวผกผันของการบวกของ  $a + bi$

### 3. การลบจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม กำหนด  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ จะได้ว่า

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

### 4. สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

สมบัติ 1. สมบัติปิดของการคูณ

ถ้า  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว  $z_1 z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน

2. สมบัติการสลับที่ของการคูณ

ถ้า  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว  $z_1 z_2 = z_2 z_1$

3. สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการคูณ

ถ้า  $z_1, z_2$  และ  $z_3$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว  $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

4. สมบัติการมีเอกลักษณ์ของการคูณ

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน  $a + bi$  ใด ๆ เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง  
จะมีจำนวนเชิงซ้อน  $1 + 0i$  ซึ่ง

$$(a + bi)(1 + 0i) = a + bi$$

$$\text{และ } (1 + 0i)(a + bi) = a + bi$$

เรียกจำนวนเชิงซ้อน  $1 + 0i$  ว่า เอกลักษณ์ของการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

5. สมบัติการมีตัวผกผันของการคูณ

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน  $a + bi$  ใด ๆ เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง

จะมีจำนวนเชิงซ้อน  $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$  ซึ่ง

$$(a + bi) \left( \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \right) = 1 + 0i$$

และ  $\left( \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \right) (a + bi) = 1 + 0i$

เรียกจำนวนเชิงซ้อน  $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$  ว่า ตัวผกผันของการคูณของ  $a + bi$

6. สมบัติการแจกแจง

ถ้า  $z_1, z_2$  และ  $z_3$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว  $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

และ  $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$

### 5. การหารจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม กำหนด  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ จะได้ว่า  $z_1 \div z_2 = z_1 z_2^{-1}$

เมื่อ  $z_2 \neq 0$  และเขียนแทนด้วย  $z_1 \div z_2 = \frac{z_1}{z_2}$

### 6. สัมยุคของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม ให้  $z = a + bi$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะเรียกจำนวนเชิงซ้อน  $a - bi$  ว่าเป็นสัมยุคของ  $z$

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

สมบัติ ให้  $z = a + bi$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

$$1. \bar{\bar{z}} = z$$

$$2. z\bar{z} = a^2 + b^2$$

$$3. \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$4. \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$5. \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

$$6. \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$7. \overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \text{ เมื่อ } z_2 \neq 0$$

$$8. \text{ ถ้า } z \neq 0 \text{ แล้ว } \frac{1}{z} = \overline{\left( \frac{1}{\bar{z}} \right)}$$

## สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการระบุ 2) ทักษะการนำความรู้ไปใช้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching

### ชั่วโมงที่ 1

#### ขั้นนำ

#### ขั้นการใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

- ครูทบทวนความรู้ เรื่อง การดำเนินการเชิงพีชคณิตของจำนวนจริง ได้แก่ การบวก และการคูณ
- ครูให้นักเรียนทบทวนสมบัติที่เกี่ยวกับการบวกและการคูณของจำนวนจริง

#### ขั้นสอน

#### ขั้นรู้ (Knowing)

- ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการดำเนินการของจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนใด ๆ โดยกำหนดให้  $z_1 = a + bi$  และ  $z_2 = c + di$  เมื่อ  $a, b, c$  และ  $d$  เป็นจำนวนจริง จากนั้นครูตั้งคำถามว่า

- $z_1$  จะเท่ากับ  $z_2$  ได้เมื่อมีเงื่อนไขใด

(แนวคำตอบ: เมื่อ  $a = c$  และ  $b = d$ )

- $z_1 + z_2$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

(แนวคำตอบ:  $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ )

- $z_1 z_2$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

(แนวคำตอบ:  $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$   
 $= (ac - bd) + (ad + bc)i$ )

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

2. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นนักเรียนและครูร่วมกันเฉลยคำตอบ โดยครูเขียนแสดงวิธีทำบนกระดาน

3. ครูยกตัวอย่างให้นักเรียนหาผลบวกและผลคูณของ  $z_1$  และ  $z_2$  ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1)  $z_1 = 2 + 3i$  ,  $z_2 = 2 - 3i$

2)  $z_1 = 1 + i$  ,  $z_2 = -3 - \frac{i}{2}$

(แนวคำตอบ: 1.  $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (2 - 3i)$   
 $= (2 + 2) + (3i - 3i)$   
 $= 4$

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= (2 + 3i)(2 - 3i) \\ &= 4 + 6i - 6i - 9i^2 \\ &= 4 - 9(-1) \\ &= 13\end{aligned}$$

2.  $z_1 + z_2 = (1 + i) + (-3 - \frac{i}{2})$   
 $= (1 - 3) + (i - \frac{i}{2})$   
 $= -2 + \frac{i}{2}$

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= (1 + i)(-3 - \frac{i}{2}) \\ &= -3 - \frac{i}{2} - 3i - \frac{i^2}{2} \\ &= -3 - \frac{7}{2}i - \frac{1}{2}(-1) \\ &= -\frac{7}{2} - \frac{5}{2}i\end{aligned}$$

### ชั่วโมงที่ 2

### ขั้นรู้ (Knowing)

4. ครูตั้งคำถามเพื่อทบทวนความรู้ของนักเรียน โดยมีแนวคำถาม ดังนี้

- นักเรียนว่าสมบัติการบวกของจำนวนจริงมีอะไรบ้าง

(แนวคำตอบ: สมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวก ถ้า  $a$ ,  $b$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริง

สมบัติ	การบวก
ปิด	1. $a + b \in R$
การสลับที่	2. $a + b = b + a$
การเปลี่ยนกลุ่ม	3. $(a + b) + c = a + (b + c)$
การมีเอกลักษณ์	4. มีจำนวนจริง $0$ ซึ่ง $0 + a = a = a + 0$
การมีอินเวอร์ส	5. สำหรับ $a$ จะมีจำนวนจริง $-a$ โดยที่ $(-a) + a = 0 = a + (-a)$ เรียก $-a$ ว่า อินเวอร์สการบวกของ $a$
การแจกแจง	6. $a(b + c) = ab + ac$

5. ครูถามนักเรียนต่อว่าถ้าเป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้วจะมีสมบัติการบวกเช่นเดียวกับจำนวนจริงหรือไม่ (มี/ไม่มี)

6. ครูให้นักเรียนพิจารณาสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวกของจำนวนเชิงซ้อนในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน ที่ละข้อดังนี้

#### 1. สมบัติปิดของการบวก

ถ้า  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว  $z_1 + z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน

#### 2. สมบัติการสลับที่ของการบวก

ถ้า  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

#### 3. สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการบวก

ถ้า  $z_1, z_2$  และ  $z_3$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

#### 4. สมบัติการมีเอกลักษณ์ของการบวก

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน  $a + bi$  ใดๆ เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง

จะมีจำนวนเชิงซ้อน  $0 + 0i$  ซึ่ง

$$(a + bi) + (0 + 0i) = a + bi$$

$$\text{และ } (0 + 0i) + (a + bi) = a + bi$$

เรียกจำนวนเชิงซ้อน  $0 + 0i$  ว่า เอกลักษณ์ของการบวกของจำนวนเชิงซ้อน

#### 5. สมบัติการมีตัวผกผันของการบวก

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน  $a + bi$  ใดๆ เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง

จะมีจำนวนเชิงซ้อน  $-a - bi$  ซึ่ง

$$(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i$$

$$\text{และ } (-a - bi) + (a + bi) = 0 + 0i$$

เรียกจำนวนเชิงซ้อน  $-a - bi$  ว่า ตัวผกผันของการบวกของ  $a + bi$  เขียนแทนด้วย  $-z$



7. ครูพิจารณาให้นักเรียนเห็นว่าหากนำเรื่องตัวผกผันของการบวกไปใช้ในการผลลบของจำนวนเชิงซ้อนได้ตั้ง นิยามต่อไปนี้ กำหนด  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ จะได้ว่า

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

8. ครูยกตัวอย่างการลบของจำนวนเชิงซ้อน  $(3 - 2i) - (10 + i) = (3 - 2i) + (-10 - i)$   
 $= -7 - 3i$

9. ครูให้นักเรียนจับกลุ่ม กลุ่มละ 3 - 4 คน จากนั้นให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาตัวอย่างที่ 7 และตัวอย่างที่ 8 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

10. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน เพื่อตรวจสอบความเข้าใจเรื่องการลบของจำนวนเชิงซ้อน

11. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.2 ข้อ 1-3 และข้อ 6,7 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

## ชั่วโมงที่ 3

### ขั้นรู้ (Knowing)

12. ครูให้นักเรียนบอกสมบัติการคูณของจำนวนจริงและให้นักเรียนเชื่อมโยงกับสมบัติการคูณของจำนวนเชิงซ้อน เช่นเดียวกับการพิจารณาสมบัติการบวกในชั่วโมงที่ 2

สมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวก ถ้า  $a$ ,  $b$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริง

สมบัติ	การคูณ
ปิด	1. $ab \in \mathbb{R}$
การสลับที่	2. $ab = ba$
การเปลี่ยนกลุ่ม	3. $(ab)c = a(bc)$
การมีเอกลักษณ์	4. มีจำนวนจริง $1$ , $1 \neq 0$ ซึ่ง $1a = a$
การมีอินเวอร์ส	5. สำหรับ $a$ ที่ไม่เป็น $0$ จะมีจำนวนจริง $a^{-1}$ โดยที่ $(a^{-1})a = 1 = a(a^{-1})$ เรียก $a^{-1}$ ว่าอินเวอร์สการคูณของ $a$
การแจกแจง	6. $a(b + c) = ab + ac$

13. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการคูณของจำนวนเชิงซ้อนในหน้าที่ 13 ทีละข้อต่อไป

### 1. สมบัติปิดของการคูณ

ถ้า  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว  $z_1 z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน

### 2. สมบัติการสลับที่ของการคูณ

ถ้า  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว  $z_1 z_2 = z_2 z_1$

### 3. สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการคูณ

ถ้า  $z_1, z_2$  และ  $z_3$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว  $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

### 4. สมบัติการมีเอกลักษณ์ของการคูณ

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน  $a + bi$  ใด ๆ เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง

จะมีจำนวนเชิงซ้อน  $1 + 0i$  ซึ่ง

$$(a + bi)(1 + 0i) = a + bi$$

$$\text{และ } (1 + 0i)(a + bi) = a + bi$$

เรียกจำนวนเชิงซ้อน  $1 + 0i$  ว่า เอกลักษณ์ของการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

### 5. สมบัติการมีตัวผกผันของการคูณ

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน  $a + bi$  ใด ๆ เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง

จะมีจำนวนเชิงซ้อน  $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$  ซึ่ง

$$(a + bi) \left( \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \right) = 1 + 0i$$

$$\text{และ } \left( \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \right) (a + bi) = 1 + 0i$$

เรียกจำนวนเชิงซ้อน  $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$  ว่า ตัวผกผันของการคูณของ  $a + bi$

### 6. สมบัติการแจกแจง

ถ้า  $z_1, z_2$  และ  $z_3$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว  $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$  และ  $(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

14. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มกลุ่มละ 3 – 4 คน ศึกษาตัวอย่างที่ 9 จากหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” เรื่องการหาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

## ชั่วโมงที่ 4

### ขั้นรู้ (Knowing)

15. ครูให้นักเรียนประยุกต์การนำตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน ( $z^{-1}$ ) มาใช้ในการหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อน เช่น กำหนดให้  $z_1 = a + bi$  และ  $z_2 = c + di$  เมื่อ  $a, b, c$  และ  $d$  เป็นจำนวนจริง แล้ว  $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$  นั่นเอง ดังบทนิยามในหนังสือเรียนหน้า 14 คือ กำหนด  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

จะได้ว่า  $z_1 \div z_2 = z_1 z_2^{-1}$  เมื่อ  $z_2 \neq 0$  และเขียนแทนด้วย  $z_1 \div z_2 = \frac{z_1}{z_2}$

16. ครูยกตัวอย่าง เช่น กำหนดให้  $z_1 = 1+2i$   $z_2 = 2 + 3i$

$$z_1 \div z_2 = z_1 z_2^{-1} = (1+2i) \div (2+3i) = (1+2i) \frac{1}{(2+3i)} = \frac{1+2i}{2+3i}$$

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

17. ให้นักเรียนจับคู่แล้วร่วมกันอภิปรายตัวอย่างที่ 10 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน ว่าเป็นการหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้วิธีการใด

**(แนวคำตอบ: ใช้การแทนค่าตามบทนิยาม)**

จากนั้นให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน

18. ครูถามนักเรียนต่อว่าในการหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนสามารถใช้วิธีอื่น ๆ ได้อีกหรือไม่ อย่างไร

**(แนวคำตอบ: ไม่ได้)**

### ขั้นรู้ (Knowing)

19. ครูให้นักเรียนพิจารณาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนแต่ละคู่ต่อไปนี้

1)  $(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - 6i + 6i - 9i^2 = 4 + 9 = 13$

2)  $(1 - i)(1 + i) = 1 - i + i - i^2 = 1 - i^2 = 1 - (-1) = 2$

3)  $(\sqrt{2} + 5i)(\sqrt{2} - 5i) = 2 + 5 = 7$

20. ครูชี้ให้นักเรียนเห็นว่า ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนในข้อ 1)–3) เป็นการคูณจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูป  $(a + bi)(a - bi)$  เมื่อ  $a, b$  เป็นจำนวนจริง และผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนทั้งสามข้อเป็นจำนวนจริง ซึ่งเราจะเรียก  $a - bi$  ว่าเป็นสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน  $a + bi$

21. ครูยกบทนิยามเรื่องสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนในหนังสือเรียนหน้า 15 ดังนี้ ให้  $z = a + bi$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนจะเรียกจำนวนเชิงซ้อน  $a - bi$  ว่าเป็นสังยุคของ  $z$  เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

22. จากคำถามในช่วงที่ 4 ที่ว่าในการหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนสามารถใช้วิธีอื่น ๆ ได้อีกหรือไม่

ให้นักเรียนพิจารณาการหารจำนวนเชิงซ้อน  $\frac{1+2i}{2+3i}$  ถ้าเราทำให้ตัวส่วนกลายเป็นจำนวนจริงได้ จะยังถือว่าเป็นรูปแบบการหารจำนวนเชิงซ้อนอยู่หรือไม่

(แนวคำตอบ: ไม่เป็น เช่น  $\frac{1+2i}{5}$  เขียนได้เป็น  $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ )

ดังนั้น  $\frac{1+2i}{2+3i}$  เราสามารถใช้สังยุคของตัวส่วนคือ  $2+3i$  นำมาคูณทั้งตัวเศษและตัวส่วน จะได้

$$\begin{aligned}\frac{1+2i}{2+3i} &= \frac{1+2i}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i} \\ &= \frac{-3i+4i-6i^2}{4+9} \\ &= \frac{2-6(-1)+i}{13} \\ &= \frac{8+i}{13}\end{aligned}$$

จะเห็นว่าเราสามารถหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนได้ โดยใช้สังยุคของตัวส่วนนำมาคูณทั้งตัวเศษและตัวส่วน

23. ครูให้นักเรียนสังเกตตัวอย่างที่ 11 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน เพื่อพิจารณาหาผลลัพธ์ของการหารโดยใช้สังยุค

24. ครูให้นักเรียนจับคู่กันอภิปรายแนวคิดในการหาค่าจำนวนเชิงซ้อน โดยใช้สังยุคหาจำนวนเชิงซ้อนในตัวอย่างที่ 12 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

25. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

26. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.2 ข้อ 4,9 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นสุ่มเรียกนักเรียนเพื่อ อธิบายวิธีทำ พร้อมทั้งให้นักเรียนทุกคนร่วมกัน ตรวจสอบคำตอบของตนเอง

### ช่วงที่ 5

### ขั้นรู้ (Knowing)

27. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 3 คน แล้วทำใบงานที่ 1.2.1 เรื่อง สมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

28. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายข้อค้นพบที่ได้จากการทำใบงาน แล้วร่วมกันสรุปเป็นสมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

29. ครูให้นักเรียนพิจารณาสมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์

ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

ให้  $z = a + bi$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

$$1. \overline{\overline{z}} = z$$

$$2. z\overline{z} = a^2 + b^2$$

$$3. \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$$

$$4. \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

$$5. \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

$$6. \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$$

$$7. \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \text{ เมื่อ } z_2 \neq 0$$

$$8. \text{ ถ้า } z \neq 0 \text{ แล้ว } \frac{1}{z} = \overline{\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}$$

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

30. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.2 ข้อ 10-11 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นนักเรียนและครูช่วยกันเฉลย โดยครูเขียนคำตอบบนกระดาน

### ขั้นลงมือทำ (Doing)

31. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 3 คน แล้วร่วมกันทำแบบฝึกทักษะ 1.2 ข้อ 12 ระดับท้าทาย ในหนังสือ เรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

### ขั้นสรุป

1. ครูให้นักเรียนช่วยกันบอกสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน
2. ครูให้นักเรียนเขียนสรุปความรู้รวบยอดเรื่อง สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนลงในสมุด

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่าง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) สมบัติเชิงพีชคณิตของ จำนวนเชิงซ้อน	- ตรวจสอบงานที่ 1.2.1 - ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ 1.2	- ใบงานที่ 1.2.1 - แบบฝึกทักษะ 1.2	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) นำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน	- แบบประเมินการ นำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการ ทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการ ทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงาน กลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการ ทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการ ทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึง ประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่น ในการทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

### สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

#### สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน
- 3) ใบงานที่ 1.2.1 เรื่อง สมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

#### แหล่งการเรียนรู้

-

## เรื่อง สมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนแสดงวิธีทำเพื่อหาค่าของจำนวนเชิงซ้อนในแต่ละข้อต่อไปนี้

กำหนดให้  $z_1 = 2 - i$   $z_2 = 3 + 2i$  เมื่อ  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน

1.  $\bar{z}_1 = \dots\dots\dots$   $\bar{z}_2 = \dots\dots\dots$

2.  $\overline{\bar{z}_1} = \dots\dots\dots$   $\overline{\bar{z}_2} = \dots\dots\dots$

3.  $z_1 \bar{z}_1 = \dots\dots\dots$

4.  $\frac{1}{2}(z_1 + z_2) = \dots\dots\dots$

5.  $\frac{1}{2}(z_1 - z_2) = \dots\dots\dots$

6.  $\overline{z_1 + z_2} = \dots\dots\dots$

7.  $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \dots\dots\dots$

8.  $z_1 z_2 = \dots\dots\dots$

9.  $\overline{z_1 z_2} = \dots\dots\dots$

10.  $\bar{z}_1 \bar{z}_2 = \dots\dots\dots$

11.  $\frac{z_1}{z_2} = \dots\dots\dots$

12.  $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \dots\dots\dots$

13.  $\overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} = \dots\dots\dots$

14.  $\frac{1}{\bar{z}_1} = \dots\dots\dots$

15.  $\overline{\left( \frac{1}{z_1} \right)} = \dots\dots\dots$

## เรื่อง สมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนแสดงวิธีทำเพื่อหาค่าของจำนวนเชิงซ้อนในแต่ละข้อต่อไปนี้

กำหนดให้  $z_1 = 2 - i$   $z_2 = 3 + 2i$  เมื่อ  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน

$$1. \bar{z}_1 = 2 + i \quad \bar{z}_2 = 3 - 2i$$

$$2. \overline{\bar{z}_1} = 2 - i \quad \overline{\bar{z}_2} = 3 + 2i$$

$$3. z_1 \bar{z}_1 = (2 - i)(2 + i) = 4 + 2i - 2i - i^2 = 4 + 1 = 5$$

$$4. \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = \frac{1}{2}[(2 - i) + (3 + 2i)] = \frac{1}{2}(5 + i)$$

$$5. \frac{1}{2}(z_1 - z_2) = \frac{1}{2}[(2 - i) - (3 + 2i)] = \frac{1}{2}(-1 - 3i)$$

$$6. \overline{z_1 + z_2} = \overline{(2 - i) + (3 + 2i)} = \overline{5 + i} = 5 - i$$

$$7. \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (2 + i) + (3 - 2i) = 5 - i$$

$$8. \overline{z_1 z_2} = \overline{(2 - i)(3 + 2i)} = \overline{6 + 4i - 3i - 2i^2} = \overline{8 + i}$$

$$9. \overline{z_1 z_2} = 8 - i$$

$$10. \bar{z}_1 \bar{z}_2 = (2 + i)(3 - 2i) = 6 - 4i + 3i - 2i^2 = 8 - i$$

$$11. \frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - i}{3 + 2i}$$

$$12. \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{2 + i}{3 - 2i}$$

$$13. \overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{2 + i}{3 - 2i}$$

$$14. \frac{1}{\bar{z}_1} = \frac{1}{2 + i}$$

$$15. \overline{\left( \frac{1}{z_1} \right)} = \frac{1}{2 + i}$$



### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

จำนวน 30 ชั่วโมง

เรื่อง กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

จำนวน 4 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

#### ผลการเรียนรู้

เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนและใช้สมบัติจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา

#### จุดประสงค์การเรียนรู้

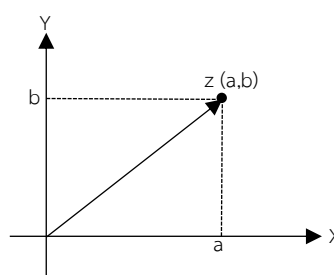
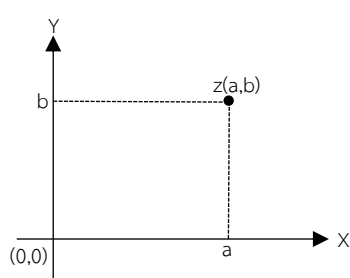
- 1) เขียนกราฟในระนาบเชิงซ้อนได้(K)
- 2) สามารถบอกสมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้ (K)
- 3) นำสมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนไปใช้ในการแก้ปัญหาได้ (P)
- 4) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

#### สาระการเรียนรู้

จำนวนเชิงซ้อนและสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน

#### สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

ระนาบเชิงซ้อนประกอบด้วย 2 แกน คือ แกนนอน เรียกว่า แกนจริง และแกนตั้ง เรียกว่า แกนจินตภาพ ให้  $z = a+bi$  จะได้จุด  $(a,b)$  หรือเวกเตอร์ที่มีจุด  $(0,0)$  เป็นจุดเริ่มต้น และจุด  $(a,b)$  เป็นจุดสิ้นสุด ดังรูป



ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน คือ  $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

สมบัติ ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ให้  $z$  และ  $w$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

1.  $|z|^2 = z\bar{z}$


2.  $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

3.  $|zw| = |z||w|$
4.  $|z + w| \leq |z| + |w|$
5.  $|z - w| \geq |z| - |w|$
6.  $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$  เมื่อ  $w \neq 0$
7.  $|z|^{-1} = \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$  เมื่อ  $z \neq 0$
8.  $|z^n| = |z|^n$  เมื่อ  $z \neq 0$  และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มใดๆ
9.  $|z| = 0$  ก็ต่อเมื่อ  $z = 0$

### สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการระบุ 2) ทักษะการวิเคราะห์ 3) ทักษะการนำความรู้ไปใช้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

### กิจกรรมการเรียนรู้

 แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching

ชั่วโมงที่ 1

### ชั้นนำ

#### ขั้นการใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

1. ครูยกตัวอย่างสถานการณ์เกี่ยวกับการหาพิกัดตำแหน่งของสิ่งต่าง ๆ ถ้าเรามีแนววัดระยะเพียงแนวเดียว เช่น เส้นจำนวนที่เราใช้เขียนแสดงจำนวนปกติ และถ้าเราบอกว่าของชิ้นนี้อยู่ตรงกับ 5 บนเส้นจำนวน แต่เราจะทราบได้อย่างไรว่าของชิ้นนี้อยู่ห่างออกไปจากเส้นจำนวนนี้เท่าใด จึงจำเป็นต้องมีเส้นจำนวนอีกแนวในแนวตั้งฉากกัน ทำให้เราอ่านพิกัดของสิ่งของใด ๆ ได้ ในระบบสองมิติก็จะช่วยให้ทราบตำแหน่งได้แม่นยำขึ้น ทั้งแนวนอนและแนวตั้ง เราเรียกว่า ระบบพิกัดฉาก มีเส้นจำนวนในแนวนอน เรียกว่า แกน x และเส้นจำนวนในแนวตั้งเรียกว่า

แกน  $y$  ตัดกันเป็นมุมฉากที่จุด  $x$  เป็น 0 และ  $y$  เป็น 0 เรียกว่า จุดกำเนิด มีการอ่านค่า  $x$  และค่า  $y$  ในรูปคู่อันดับ  $(x,y)$  เรียกว่าพิกัด  $(x,y)$

2. ครูแจกใบงานที่ 3.1.1 เรื่องระบบพิกัดฉากของจำนวนจริง เมื่อนักเรียนทำใบงานเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

### ขั้นสอน

#### ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูอธิบายให้นักเรียนว่า เรามีระนาบจำนวนไว้เพื่อแสดงตำแหน่งได้ใน 2 มิติ คือ ระยะเวลาบนและระยะแนวตั้งในระบบพิกัดฉาก และสามารถบอกตำแหน่งของจุดใดจุดหนึ่งในรูปคู่อันดับ พิกัด

2. ครูถามให้นักเรียนได้เปรียบเทียบกับจำนวนเชิงซ้อนว่า

- นักเรียนสามารถแทนจำนวนเชิงซ้อน  $(a,b)$  ไต ๆ ด้วยจุดบนระนาบในระบบพิกัดฉากได้หรือไม่  
(แนวคำตอบ: ได้)
- จากข้อคำถามข้างต้น ถ้าแทนได้จะสามารถแทนได้อย่างไร

(แนวคำตอบ แทนแกน  $x$  หรือแกนอนว่าแกนจริง (real axis) และเรียกแกน  $y$  หรือแกนตั้งว่าแกนจินตภาพ (imaginary axis) )

- นักเรียนจะเรียกระนาบที่ใช้แสดงพิกัดของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ว่าอย่างไร

(แนวคำตอบ ระนาบเชิงซ้อน)

3. ครูยกตัวอย่างให้นักเรียนศึกษาการเขียนจุดในระนาบเชิงซ้อน ตัวอย่างที่ 13 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน โดยครูมีคำถามประกอบคือ

- นักเรียนคิดว่าคู่อันดับใด ๆ ที่กำหนดให้จะแสดงจุดได้เช่นเดียวกับระนาบจำนวนจริงได้หรือไม่
- ครูยกตัวอย่าง คู่อันดับ  $(4,0)$  ให้นักเรียนหาระยะที่แกน  $x$  เป็น 4 ตัดตั้งฉากกับระยะที่แกน  $y$  มีค่าเป็น 0 ดังรูปในตัวอย่างที่ 13 จากหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

4. ครูชี้ให้นักเรียนเห็นว่าการเขียนกราฟของจำนวนเชิงซ้อน  $a+bi$  หรือ  $(a,b)$  สามารถทำได้โดยเขียนจุดลงในระนาบเชิงซ้อน

#### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

5. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นสุ่มเรียกนักเรียนเพื่อให้อธิบายแนวคิดของตนเอง

#### ขั้นรู้ (Knowing)

6. ครูถามนักเรียนว่าถ้ากำหนดจำนวนเชิงซ้อน  $a+bi$  และจำนวนเชิงซ้อนที่ยังไม่ใช้ผลสำเร็จ เช่น  $i^2(3+3i)$  จะสามารถเขียนกราฟได้ หรือไม่

(แนวคำตอบ: ได้)

7. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 14 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน และให้นักเรียนช่วยกันบอกข้อสรุปของแนวทางที่ดำเนินการ

(แนวคำตอบ: ขั้นที่ 1 ดำเนินการจำนวนเชิงซ้อนเหล่านั้นให้อยู่ในรูป  $a+bi$  ก่อน  
ขั้นที่ 2 ให้ค่า  $a$  แทนที่แกน  $x$  และค่า  $b$  แทนที่แกน  $y$ )

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

8. ให้นักเรียนจับกลุ่มกลุ่มละ 3-4 คน ทำกิจกรรมลองทำดู ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน และแบบฝึกทักษะ 1.3 ข้อ 1 และ 2

## ชั่วโมงที่ 2

### ขั้นรู้ (Knowing)

9. ครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

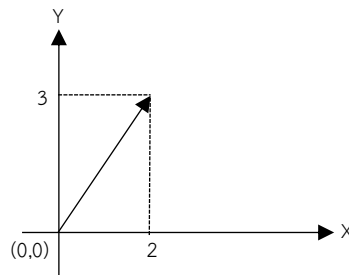
• ถ้าเราแสดงจำนวนเชิงซ้อนเป็นเวกเตอร์ได้ เราสามารถหาความยาวของกราฟของจำนวนเชิงซ้อนนั้นได้หรือไม่ อย่างไร

(แนวคำตอบ: ได้ โดยการใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)

10. ครูยกตัวอย่างการหาความยาวของกราฟของจำนวนเชิงซ้อน  $a+bi$  ใด ๆ เช่น

- จงหาความยาวของกราฟของ  $2+3i$

แนวคิด 1) วาดกราฟของจำนวนเชิงซ้อน  $2+3i$



2) พิจารณา  $a = 2$  คือระยะแกน  $x = 2$  หน่วย

$b = 3$  คือระยะแกน  $y = 3$  หน่วย

3) สมมติให้ ความยาวของกราฟ  $2+3i$  แทนด้วย  $u$  ดังนั้น  $u^2 = 2^2 + 3^2$

$$= 4 + 9$$

$$= 13$$

นั่นคือ  $u = \sqrt{13}$  หน่วย

11. ครูบอกนักเรียนว่าเราจะเรียกรูปการหาความยาวของกราฟของจำนวนเชิงซ้อนว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน  $z$  เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $|z|$  หรือเรียกว่าการหาขนาดของ  $z$  แทนด้วยสัญลักษณ์  $r$

12. ครูยกตัวอย่างการหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1)  $i(3-2i)$

แนวคิด  $i(3 - 2i) = 3i + 2 = (3,2)$

$$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

2)  $i^2(3i^3 + i^2)$

แนวคิด  $i^2(3i^3 + i^2) = 3i^5 - i^4 = 3i - 1 = (-1, 3)$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

3)  $\frac{3 - \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i}$

แนวคิด 
$$\begin{aligned} \frac{3 - \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} &= \frac{3 - \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{3 - 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}i + 3i^2}{1 + 3} \\ &= \frac{-4\sqrt{3}i}{4} \\ &= -\sqrt{3}i \end{aligned}$$

เขียน  $z$  ในรูป  $a + bi = 0 - \sqrt{3}i$

เขียน  $z$  ในรูป  $(a,b) = (0, -\sqrt{3})$

จะได้  $|z| = \sqrt{0^2 + (-\sqrt{3})^2} = 3$

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

13. ให้นักเรียนแต่ละคนศึกษาตัวอย่างที่ 15 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นให้นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

14. ให้นักเรียนจับคู่แล้วทำแบบฝึกหัด 1.3 ข้อที่ 4 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นสลับคู่กันตรวจคำตอบ

### ชั่วโมงที่ 3

### ขั้นรู้ (Knowing)

15. ครูถามนักเรียนว่าถ้าครูกำหนดสมการค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนแล้ว สามารถแสดงคำตอบในรูปกราฟได้หรือไม่ เช่น  $|z - 2 + i| = 2$

แนวคิด  $z = a + bi$  หรือ  $x + yi$

$$|z - 2 + i| = 2$$

จะได้  $|x + yi - 2 + i| = 2$

$$|(x-2) + (y+1)i| = 2$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = 2$$

16. ครูถามนักเรียนว่าจากการหาค่าสัมบูรณ์ของโจทย์ในข้อ 1. ได้ความสัมพันธ์ใกล้เคียงกับสมการชนิดใด หรือกราฟใด

(แนวคำตอบ: กราฟของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(h,k)$  รัศมียาว  $r$  หน่วย มีสมการรูปรมาตรฐาน คือ  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ )

17. ครูให้นักเรียนพิจารณาสมการ  $\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = 2$  แล้วยกกำลังสองทั้ง 2 ข้างของสมการ

จะได้ 
$$\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}\right)^2 = 2^2$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2^2$$

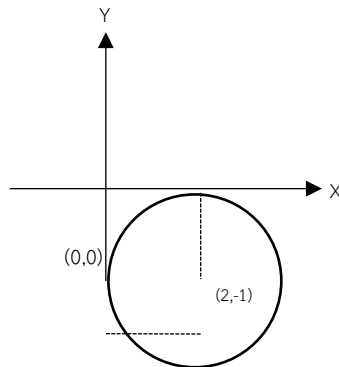
18. ครูถาม โดยมีแนวคำถาม ดังนี้

- นักเรียนเห็นหรือไม่ว่าตรงกับสมการชนิดใด

(แนวคำตอบ: สมการวงกลม)

- จากนั้นครูถามนักเรียนต่อว่าสามารถเขียนกราฟได้หรือไม่ อย่างไร

(แนวคำตอบ: ได้ เขียนกราฟโดยมี  $(h,k) = (2,-1)$  และมี  $r = 2$  ดังนี้



19. ครูให้นักเรียนพิจารณาว่าถ้าเปลี่ยนจากความสัมพันธ์ที่เป็นสมการ สามารถเปลี่ยนเป็นอสมการได้หรือไม่

(แนวคำตอบ: ได้)

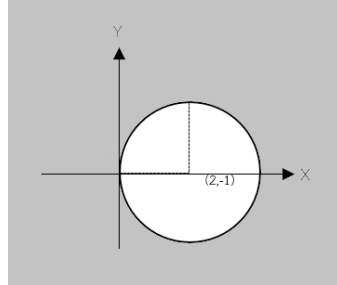
จากนั้นให้นักเรียนพิจารณา เช่น  $|z - 2 + i| \geq 2$  จะได้  $(x-2)^2 + (y+1)^2 \geq 2^2$

จากนั้นครูถามนักเรียนต่อว่า

- สามารถเขียนกราฟของอสมการหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้หรือไม่ อย่างไร

(แนวคำตอบ: ได้ ดังนี้กราฟของอสมการ  $(x-2)^2+(y+1)^2 \geq 2^2$

จะได้ คำตอบที่เป็นกราฟของวงกลม  $(x-2)^2+(y+1)^2 \geq 2^2$  และคำตอบ  $(x,y)$  ที่มีค่ามากกว่า ดังนี้



)

20. ครูให้นักเรียนสังเกตว่ากราฟของอสมการค่าสัมบูรณ์ที่อยู่ในรูปสมการวงกลม ถ้าเป็นเครื่องหมาย < หรือ > ก็แสดงว่าไม่ต้องหาความสัมพันธ์ที่เท่ากับ ได้แก่

- $(x-h)^2 + (y-k)^2 > r^2$  หมายความว่า เราไม่ใช้ค่า  $(x,y)$  ที่สัมพันธ์กับ  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$  จึงใช้เส้นประเขียนแทนเส้นรอบวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(h,k)$  รัศมี  $r$  แล้วแรเงาคำตอบ  $(x,y)$  ทุกค่าที่อยู่ภายนอกวงกลมนั้น

- $(x-h)^2 + (y-k)^2 < r^2$  หมายความว่า เราไม่ใช้ค่า  $(x,y)$  ที่สัมพันธ์กับ  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$  จึงใช้เส้นประเขียนแทนเส้นรอบวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(h,k)$  รัศมี  $r$  แล้วแรเงาคำตอบ  $(x,y)$  ทุกค่าที่อยู่ภายในวงกลมนั้น

- $(x-h)^2 + (y-k)^2 \geq r^2$  หรือ  $(x-h)^2 + (y-k)^2 \leq r^2$  หมายความว่า เราต้องการใช้ค่า  $(x,y)$  ที่สัมพันธ์กับ  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$  จึงใช้เส้นทึบเขียนแทนเส้นรอบวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(h,k)$  รัศมี  $r$  แล้วแรเงาคำตอบภายในหรือภายนอกวงกลมตามเครื่องหมายอสมการ

21. ครูถามนักเรียนว่าถ้าโจทย์ให้เขียนกราฟของ  $z$  แต่มีกำกับมาว่า  $\text{Re}(z)$  หรือ  $\text{Im}(z)$  จะเขียนกราฟอย่างไร

(แนวคำตอบ: ถ้าเป็น  $\text{Re}(z)$  จะวาดกราฟเฉพาะส่วนจริงจะได้สมการคือ  $x = a$  แต่ถ้าเป็น  $\text{Im}(z)$

จะวาด กราฟเฉพาะส่วนจินตภาพ จะได้สมการคือ  $y = b$ )

22. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 16-17 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการ เรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

23. ครูแบ่งกลุ่มนักเรียน กลุ่มละ 3-4 คน แล้วให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 1.3 ข้อ 5 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการ เรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

## ชั่วโมงที่ 4

### ขั้นรู้ (Knowing)

24. ครูให้นักเรียนเปิดหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน สังเกตการณ์พิสูจน์สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน ข้อ 1-3 ดังนี้

$$1) |z|^2 = z\bar{z}$$

$$2) |z| = |-z| = |\bar{z}|$$

$$3) |zw| = |z||w|$$

25. จากนั้นครูยกตัวอย่างเพื่อแสดงให้นักเรียนเห็นว่าการณ์พิสูจน์สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน ข้ออื่น ๆ เป็นจริง โดยครูตั้งคำถาม ดังนี้ กำหนดให้  $z = 1 + 2i$  และ  $w = 2 + 3i$  แล้วให้นักเรียนร่วมกันหาค่าต่อไปนี้

$$1) \frac{|z|}{|w|} \quad \text{และ} \quad \left| \frac{z}{w} \right|$$

$$2) |z + w| \quad \text{และ} \quad |z| + |w|$$

$$3) |z - w| \quad \text{และ} \quad |z| - |w|$$

### แนวคิด

$$1) |z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|w| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\frac{|z|}{|w|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$$

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \left| \frac{1+2i}{2+3i} \right| = \left| \frac{8+i}{3} \right| = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{64+1}{9}} = \sqrt{\frac{65}{9}} = \frac{\sqrt{65}}{3}$$

จะเห็นว่าสมบัติ  $\frac{|z|}{|w|} = \left| \frac{z}{w} \right|$  เป็นจริง

$$2) \text{ หา } |z + w| = |1 + 2i + 2 + 3i| = |3 + 5i| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} \approx 5.830$$

$$|z| + |w| = \sqrt{5} + \sqrt{13} \approx 2.236 + 3.605 \approx 5.842$$

จะเห็นว่าสมบัติ  $|z + w| \leq |z| + |w|$  เป็นจริง

$$3) \text{ หา } |z - w| = |1 + 2i - (2 + 3i)| = |-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \approx 1.414$$

$$|z| - |w| = \sqrt{5} - \sqrt{13} \approx 2.236 - 3.605 \approx -1.37$$

จะเห็นว่าสมบัติ  $|z - w| \geq |z| - |w|$  เป็นจริง



### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

26. ครูให้นักเรียนแต่ละคนหาค่าของ  $|z|^{-1}$ ,  $\left|\frac{1}{z}\right|$  และ  $\frac{1}{|z|}$  เมื่อกำหนดให้  $z = 1 + 2i$  จากนั้นให้นักเรียน

ร่วมกัน สรุปว่า  $|z|^{-1} = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$  เมื่อ  $z \neq 0$

27. ครูถามนักเรียนต่อว่าเมื่อกำหนดให้  $z = 0$  จะสามารถหาค่า  $|z|$  ได้เท่าไร จากนั้นครูสรุปให้นักเรียนเห็นว่า  $|z| = 0$  ก็ต่อเมื่อ  $z = 0$

### ขั้นลงมือทำ (Doing)

28. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 3 คน แล้วร่วมกันทำ Thinking Time ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน และทำกิจกรรมถอดรหัสจำนวนเชิงซ้อนในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

### ขั้นสรุป

1. ครูถามตอบนักเรียนเพื่อทบทวนขั้นตอนการวาดกราฟในระนาบเชิงซ้อน
2. ครูให้นักเรียนเขียนสรุปความรู้รวบยอดเรื่อง สมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

## การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้			
1) กราฟของจำนวนเชิงซ้อน	- ตรวจสอบใบงานที่ 1.3.1	- ใบงานที่ 1.3.1	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) สมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน	- ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ 1.3	- แบบฝึกทักษะ 1.3	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
3) นำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอผลงาน	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
6) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

## สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

### สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน
- 3) ใบงานที่ 1.3.1 เรื่อง ระบบพิกัดฉากของจำนวนจริง

### แหล่งการเรียนรู้

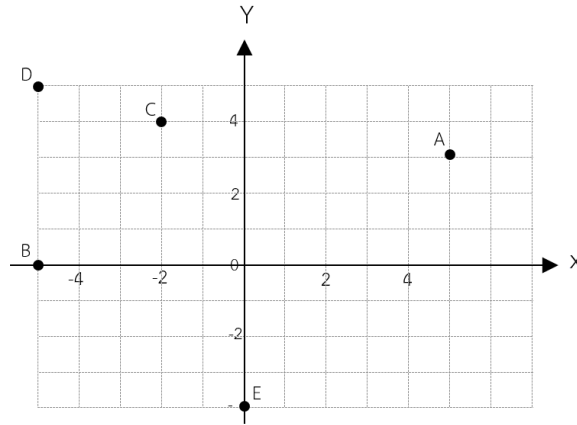
-

### ใบงาน 1.3.1

#### เรื่อง ระบบพิกัดฉากของจำนวนจริง

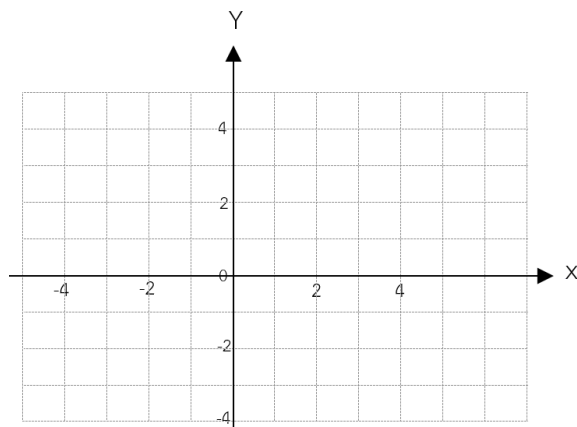
**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนแสดงวิธีทำในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. จงเขียนพิกัดของจุด A, B, C, D และ E จากรูปที่กำหนด



- พิกัด A คือ ..... พิกัด B คือ .....
- พิกัด C คือ ..... พิกัด D คือ .....
- พิกัด E คือ .....

2. ให้กำหนดจุดลงบนระนาบจำนวนตามพิกัดต่อไปนี้ A(0,0) B(4,-4) C(0,5) D(-3,2) และ E(-4,-1)

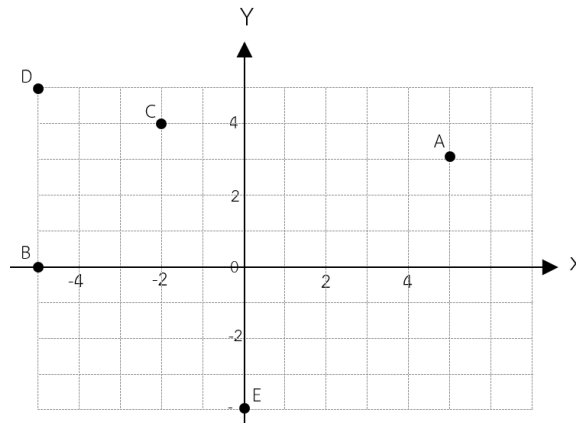


เรื่อง ระบบพิกัดฉากของจำนวนจริง

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนแสดงวิธีทำเพื่อหาค่าของจำนวนเชิงซ้อนในแต่ละข้อต่อไปนี้

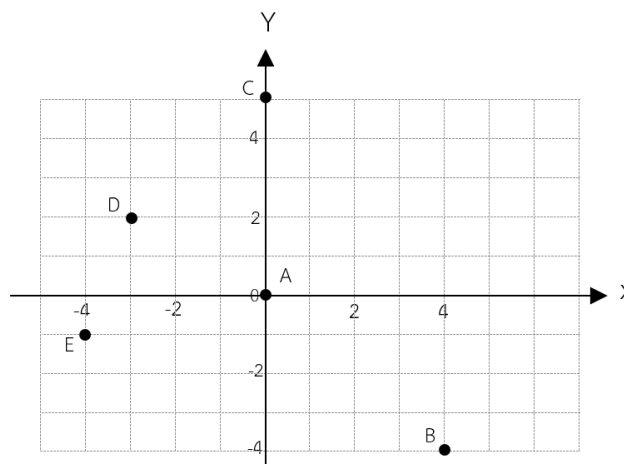
**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนแสดงวิธีทำในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. จงเขียนพิกัดของจุด A, B, C, D และ E จากรูปที่กำหนด



- พิกัด A คือ (5,3) ..... พิกัด B คือ (-5,0) .....  
 พิกัด C คือ (-2,4) ..... พิกัด D คือ (-5,5) .....  
 พิกัด E คือ (0,-4) .....

2. ให้กำหนดจุดลงบนระนาบจำนวนตามพิกัดต่อไปนี้ A(0,0) B(4,-4) C(0,5) D(-3,2) และ E(-4,-1)



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

เรื่อง รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

จำนวน 30 ชั่วโมง

จำนวน 3 ชั่วโมง

โรงเรียนสตรีศึกษา

### ผลการเรียนรู้

หารากที่  $n$  ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) หารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนได้ (K)
- 2) เขียนแสดงขั้นตอนวิธีการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนได้ (P)
- 3) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

### สาระการเรียนรู้

รากที่  $n$  ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1

### สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

ให้  $z = a + bi$  และ  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\text{รากที่สองของ } z \text{ คือ } \pm \left( \sqrt{\frac{r+a}{2}} + \sqrt{\frac{r-a}{2}}i \right) \text{ เมื่อ } b \geq 0$$
$$\pm \left( \sqrt{\frac{r+a}{2}} - \sqrt{\frac{r-a}{2}}i \right) \text{ เมื่อ } b < 0$$

คำตอบของสมการพหุนามกำลังสอง  $ax^2 + bx + c = 0$  เมื่อ  $a, b$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริง และ  $a \neq 0$  คือ


$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ เมื่อ } b^2 - 4ac \geq 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{|b^2 - 4ac}i}}{2a} \text{ เมื่อ } b^2 - 4ac < 0$$

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการวิเคราะห์ 2) ทักษะการนำความรู้ไปใช้ 2. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

 แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching

ชั่วโมงที่ 1

ชั้นนำ

ขั้นการใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

- ครูทบทวนความรู้เดิมในเรื่อง รากที่สองของจำนวนจริง โดยครูถามนักเรียนว่า รากที่สองของ  $a$  มีบทนิยาม ว่าอย่างไร (แนวคำตอบ รากที่สองของจำนวนจริง  $a$  เมื่อ  $a \geq 0$  รากที่สองของจำนวนจริง  $a$  มี 2 ค่าเสมอ คือ รากที่สองที่เป็นค่าบวก เขียนแทนด้วย  $\sqrt{a}$  และ รากที่สองที่เป็นค่าลบ เขียนแทนด้วย  $-\sqrt{a}$ )
- ครูแจกใบงาน 1.4.1 เรื่อง รากที่สองของจำนวนจริง ให้กับนักเรียนจากนั้นให้เวลานักเรียนทำประมาณ 10 นาที เพื่อให้นักเรียนได้ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหารากที่สอง
- ครูให้นักเรียนหาคำตอบของสมการกำลังสองต่อไปนี้
  - $5x - 15x^2 = 0$
  - $x^2 + 8x + 12 = 0$
  - $4x^2 + 8x + 3 = 0$

(แนวคำตอบ:

1)  $5x - 15x^2 = 0$

วิธีทำ  $5x(1-3x) = 0$

จะได้  $5x = 0$  หรือ  $1 - 3x = 0$

$-3x = -1$

ดังนั้น  $x = \frac{0}{5} = 0$  หรือ  $x = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

นั่นคือ 0 และ  $\frac{1}{3}$  เป็นคำตอบของสมการ

ตอบ  $\{0, \frac{1}{3}\}$

$$2) x^2 + 8x + 12 = 0$$

วิธีทำ  $(x + 6)(x + 2) = 0$

จะได้  $(x + 6) = 0$  หรือ  $(x + 2) = 0$

ดังนั้น  $x = -6$  หรือ  $x = -2$

นั่นคือ -6 และ -2 เป็นคำตอบของสมการ

ตอบ  $\{-6, -2\}$

$$3) 4x^2 + 8x + 3 = 0$$

วิธีทำ  $(2x + 3)(2x + 1) = 0$

จะได้  $(2x + 3) = 0$  หรือ  $(2x + 1) = 0$

$2x = -3$  หรือ  $2x = -1$

ดังนั้น  $x = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$  หรือ  $x = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

นั่นคือ  $-\frac{3}{2}$  และ  $-\frac{1}{2}$  เป็นคำตอบของสมการ

ตอบ  $\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\}$

4. ครูตั้งคำถามกับนักเรียนว่า

- วิธีการหาคำตอบของสมการกำลังสองตัวแปรเดียวนั้น นักเรียนจะมีวิธีในการหาคำตอบได้ทั้งหมด

กี่วิธี

(แนวคำตอบ: 2 วิธี คือ 1) ใช้การแยกตัวประกอบ 2) การใช้สูตร)

5. ครูยกตัวอย่าง  $x^2 - 8x - 40 = 0$  แล้วให้นักเรียนหาคำตอบของสมการโดยการใช้สูตร

(แนวคำตอบ:  $x^2 - 8x - 40 = 0$ )

$$\begin{aligned} \text{แยกตัวประกอบโดยการใช้สูตร} \quad x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(-40)}}{2(1)} \\ &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{64 + 160}}{2} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{224}}{2} \\ &= \frac{8 \pm 4\sqrt{14}}{2} \\ \text{ดังนั้น} \quad x &= \frac{8 + 4\sqrt{7}}{2} = 4 + 2\sqrt{7} \quad \text{หรือ} \quad x = \frac{8 - 4\sqrt{7}}{2} = 4 - 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

### ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูให้นักเรียนพิจารณาการหารากที่สองของ  $z$  ว่าทำเช่นเดียวกันกับการหารากที่สองของจำนวนจริงได้หรือไม่

(แนวคำตอบ: ไม่ได้)

2. ครูแสดงการพิสูจน์สูตรเพื่อใช้ในการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนใดๆ ให้นักเรียนได้ทำความเข้าใจที่มาของสูตร จากนั้นครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปหลักสูตรในการหารากที่สองของ  $z$  เมื่อ  $z = a+bi$  จะได้ว่ารากที่สองของ  $z$  คือ

$$\pm \left( \sqrt{\frac{r+a}{2}} + \sqrt{\frac{r-a}{2}}i \right) \quad \text{เมื่อ } b \geq 0$$

$$\pm \left( \sqrt{\frac{r+a}{2}} - \sqrt{\frac{r-a}{2}}i \right) \quad \text{เมื่อ } b < 0$$

3. ครูกยกตัวอย่างการหาเซตคำตอบของสมการที่มีสัมประสิทธิ์ไม่ใช่จำนวนจริง เช่น

1)  $(2 - 3i)x^2 - (8 + i) = 0$

วิธีทำ  $(2 - 3i)x^2 - (8 + i) = 0$

$$x^2 = \frac{8 + i}{2 - 3i}$$

$$x^2 = \frac{8 + i}{2 - 3i} \cdot \frac{2 + 3i}{2 + 3i}$$

$$x^2 = \frac{16 + 24i + 2i + 3i^2}{4 + 9}$$

$$x^2 = \frac{13 + 26i}{13}$$

$$x^2 = 1 + 2i$$

$x$  คือ รากที่สองของ  $1 + 2i$  ( $a = 1$ ,  $b = 2$  และ  $r = \sqrt{5}$ )

$$\text{ดังนั้น } x = \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}i \right)$$

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)



4. ครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 18 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” และแบบฝึกทักษะที่ 1.4 ข้อ 1 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบพร้อมกัน โดยครูเขียนคำตอบบนกระดาน

## ชั่วโมงที่ 2

### ขั้นรู้ (Knowing)

5. ครูให้นักเรียนทบทวนสูตรการหาค่า  $x$  จากสมการกำลังสองที่จัดอยู่ในรูป  $ax^2 + bx + c = 0$  เมื่อ  $a, b$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริง

$$\text{(แนวคำตอบ: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\text{)}$$

6. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 3 - 4 คน ช่วยกันหาคำตอบของสมการต่อไปนี้ โดยการใช้สูตร

$$1) x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$2) 2x^2 + 9x - 5 = 0$$

7. ครูถามนักเรียนว่าคำตอบที่ได้จากข้อ 2. ข้อใดที่คำตอบเป็นจำนวนจริงและข้อใดที่ได้คำตอบไม่ใช่จำนวนจริง

(แนวคำตอบ:

สมการในข้อ 1. ได้คำตอบที่ไม่ใช่จำนวนจริง ดังนี้

$$1) x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm 2i}{2} \\ &= -2 \pm i \end{aligned}$$

จะเห็นว่าค่า  $x$  ที่ได้เมื่อ  $-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$  จะไม่ใช่จำนวนจริงที่เราทราบแล้วว่าเป็นจำนวนเชิงซ้อน

สมการในข้อ 2. ได้คำตอบเป็นจำนวนจริง ดังนี้

$$2) 2x^2 + 9x - 5 = 0$$

วิธีที่ 1 หาคำตอบโดยการใช้สูตร

$$\begin{aligned}x &= \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)} \\&= \frac{-9 \pm \sqrt{81+40}}{4} \\&= \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{4} \\&= \frac{-9 \pm 11}{4} \\x &= \left\{ \frac{1}{2}, -5 \right\}\end{aligned}$$

วิธีที่ 2 หาคำตอบโดยการใช้การแยกตัวประกอบ

$$\begin{aligned}2x^2 + 9x - 5 &= 0 \\(2x - 1)(x + 5) &= 0 \\จะได้ว่า 2x - 1 = 0 & \text{ หรือ } x + 5 = 0 \\นั่นคือ } x = \frac{1}{2} & \text{ หรือ } x = -5 \\ดังนั้นคำตอบของสมการคือ } \left\{ \frac{1}{2}, -5 \right\}\end{aligned}$$

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

8. ครูให้นักเรียนแต่ละคนศึกษาตัวอย่างที่ 20 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นให้นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

9. ครูให้นักเรียนจับคู่แล้วทำแบบฝึกทักษะ 1.4 ข้อที่ 3 ใน หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อนจากนั้นสลับคู่กันตรวจคำตอบ

### ชั่วโมงที่ 3

### ขั้นรู้ (Knowing)

10. ครูถามนักเรียนว่าสมการกำลังสองตัวแปรเดียวที่มีสัมประสิทธิ์ที่ไม่ใช่จำนวนจริงแล้วจะมีวิธีการหาคำตอบ ของสมการ โดยใช้สูตรเช่นเดียวกับสมการกำลังสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงได้หรือไม่

(แนวคำตอบ: ทั้งได้และไม่ได้)

11. ครูยกตัวอย่าง  $x^2 + (1 + 2i)x - (1 - i) = 0$  แล้วแสดงวิธีการหารากที่สองให้นักเรียนดู โดยการใช้สูตร จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-(1+2i) \pm \sqrt{(1+2i)^2 - 4(1)(-1+i)}}{2} \\
x &= \frac{-1-2i \pm \sqrt{1+4i-4+4-4i}}{2} \\
x &= \frac{(-1+2i) \pm 3}{2} \\
x &= \frac{2+2i}{2}, \frac{-4+2i}{2} \\
x &= 1+i, -2+i
\end{aligned}$$

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

12. ครูให้นักเรียนจับกลุ่ม กลุ่มละ 3-4 คน จากนั้นช่วยกันทำแบบฝึกทักษะ 1.4 ข้อ 2 ในหนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นนักเรียนและครูร่วมกันเฉลย บนกระดาน

### ขั้นลงมือทำ (Doing)

13. ครูให้นักเรียนจับคู่แล้วร่วมกันทำแบบฝึกทักษะ 1.4 ข้อ 4 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

### ขั้นสรุป

1. ครูให้นักเรียนบอกสูตรที่ใช้ในการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน
2. ครูให้นักเรียนบอกวิธีการหาคำตอบของสมการพหุนามกำลังสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และจำนวนเชิงซ้อน

## การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่าง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) รากที่สองของจำนวน เชิงซ้อน	- ตรวจสอบงาน 1.4.1 - ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ 1.4	- ใบงาน 1.4.1 - แบบฝึกทักษะ 1.4	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) นำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน	- แบบประเมินการ นำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงาน กลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่น ในการทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

## สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

### สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน
- 3) ใบงานที่ 1.4.1 เรื่อง รากที่สองของจำนวนจริง

### แหล่งการเรียนรู้

-

## ใบงาน 1.4.1

### เรื่อง รากที่สองของจำนวนจริง

---

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. จงหารากที่สองของ

1) 225

ตอบ .....

2) 0.0064

ตอบ .....

3)  $\frac{196}{361}$

ตอบ .....

4) 0

ตอบ .....

5) -144

ตอบ .....

2. จงหาค่าของ

1)  $\sqrt{676}$

ตอบ .....

2)  $-\sqrt{256}$

ตอบ .....

3)  $\sqrt{-100}$

ตอบ .....

4)  $\sqrt{4^2}$

ตอบ .....

5)  $\sqrt{(-4)^2}$

ตอบ .....

6)  $-\sqrt{(-3)^2}$

ตอบ .....

เรื่อง รากที่สองของจำนวนจริง

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. จงหารากที่สองของ

1) 225

ตอบ... 15 และ -15 .....

2) 0.0064

ตอบ... 0.08 และ -0.08 .....

3)  $\frac{196}{361}$

ตอบ...  $\frac{14}{19}$  .....

4) 0

ตอบ... 0 .....

5) -144

ตอบ... หาค่าไม่ได้ .....

2. จงหาค่าของ

1)  $\sqrt{676}$

ตอบ.....26.....

2)  $-\sqrt{256}$

ตอบ.....-16.....

3)  $\sqrt{-100}$

ตอบ.....หาค่าไม่ได้.....

4)  $\sqrt{4^2}$

ตอบ.....4.....

5)  $\sqrt{(-4)^2}$

ตอบ.....4.....

6)  $-\sqrt{(-3)^2}$

ตอบ..... $-(-3)^2$ .....

## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

จำนวน 30 ชั่วโมง

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

จำนวน 4 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

### ผลการเรียนรู้

เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนและใช้สมบัติจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) หาค่าอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนได้ (K)
- 2) เขียนจำนวนเชิงซ้อนให้อยู่ในรูปเชิงขั้วได้ (P)
- 3) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

### สาระการเรียนรู้

จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

### สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว คือ  $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$  หรือ  $z = r \operatorname{cis}\theta$

เรียกมุม  $\theta$  ว่าอาร์กิวเมนต์ (argument) ของ  $z$  ใช้สัญลักษณ์  $\operatorname{Arg}(z)$

ทฤษฎีบทของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว ให้  $z, z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน

$$1. z_1 z_2 = r_1 r_2 [r \cos(\theta_1 + \theta_2)] + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$2. \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i \sin\theta)$$

$$3. \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [r \cos(\theta_1 - \theta_2)] + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \text{ เมื่อ } z_2 \neq 0$$

$$4. \bar{z} = r[(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))]$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2)$$

## ทฤษฎีบทของเดอมัวร์

กำหนดให้  $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$  และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก

จะได้  $z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$

### สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการวิเคราะห์ 2) ทักษะการเชื่อมโยง	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน
2. ความสามารถในการแก้ปัญหา	

### กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching

### ชั่วโมงที่ 1

#### ชั้นนำ

#### ขั้นการใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

1. ครูยกตัวอย่างโจทย์  $(2 - i)^{100}$  ให้นักเรียนหาผลลัพธ์ จากนั้นครูตั้งคำถามกับนักเรียน โดยมีแนวคำถาม ดังนี้

- นักเรียนสามารถหาคำตอบได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

(แนวคำตอบ: ไม่สามารถหาคำตอบได้ เพราะเลขชี้กำลังมีค่าเป็นจำนวนมาก)

จากนั้นครูอธิบายให้นักเรียนเห็นว่านอกจากจะเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป  $a + bi$  หรือ  $(a,b)$

ยังสามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนได้อีกรูปแบบหนึ่งโดยใช้ระบบพิกัดเชิงขั้ว เรียกจำนวนเชิงซ้อนดังกล่าวว่า รูปเชิงขั้ว ซึ่งจะช่วยให้การคำนวณเกี่ยวกับการคูณ การหาร เลขยกกำลัง  $n$  และการหารากที่  $n$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก ได้สะดวกและรวดเร็วขึ้น

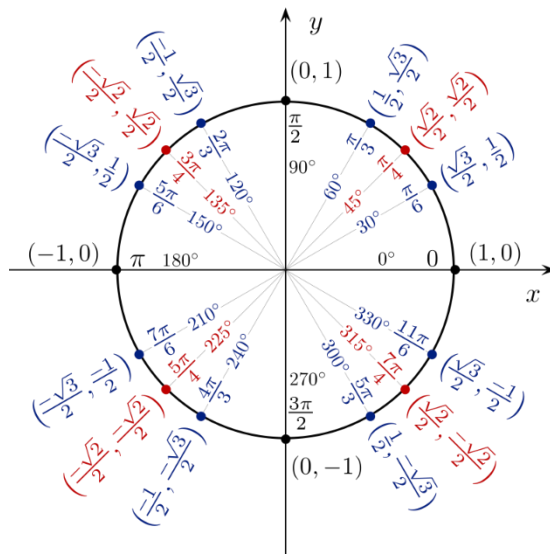
2. ครูบทวน เรื่องการหาค่าตรีโกณมิติที่สัมพันธ์กับวงกลม 1 หน่วย โดยครูวาดวงกลม 1 หน่วยลงบนกระดานแล้วตั้งคำถามดังต่อไปนี้

- วงกลมหนึ่งหน่วยมีความสัมพันธ์กับอัตราส่วนตรีโกณมิติอย่างไร

(แนวคำตอบ: จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\theta$  หน่วย ทุกจุดบนวงกลม 1 หน่วย  $(x,y)$  สามารถเทียบได้กับ  $(\cos\theta, \sin\theta)$ )



- ครูให้นักเรียนมาเติมพิกัด (x,y) บนรอบวงกลม 1 หน่วย ทุกพิกัดตามขนาดของมุมที่สามารถระบุได้  
(แนวคำตอบ:



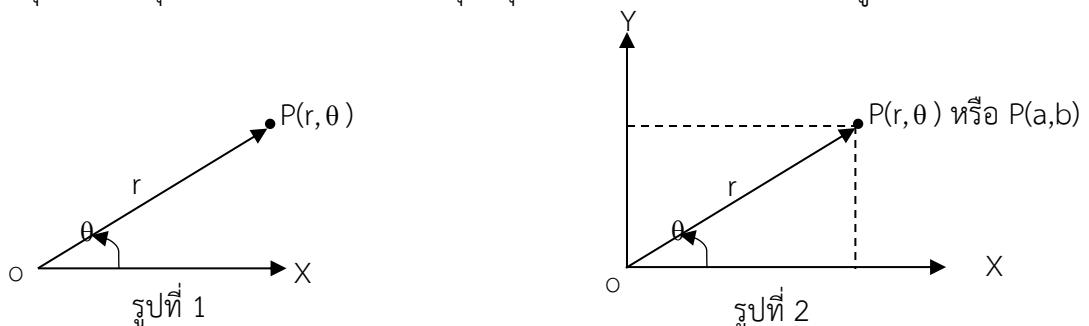
### ขั้นสอน

#### ขั้นรู้ (Knowing)

- ครูบอกนักเรียนว่า จากเรื่องการเขียนกราฟของจำนวนเชิงซ้อน เราสามารถบอกขนาดของมุม ( $\theta$ ) ของจำนวนเชิงซ้อนได้เช่นเดียวกับการอ่านมุมในวงกลม 1 หน่วย และครูถามนักเรียนต่อ โดยมีแนวคำถามดังนี้
  - นักเรียนจะสามารถหาขนาดความยาวของจำนวนเชิงซ้อน ( $r$ ) ได้หรือไม่

(แนวคำตอบ: ได้ จะได้ว่า  $r = \sqrt{a^2+b^2}$ )

- ครูบอกนักเรียนว่า ระบบพิกัดเชิงขั้วเป็นระบบที่ใช้บอกตำแหน่งของจุด P บนระนาบอีกแบบหนึ่ง ประกอบไปด้วยจุดขั้ว (pole) มีแกนนอนเป็นแกนเชิงขั้วที่จุด P ไต ๆ บนระนาบจะมีรังสีจากขั้วไปยังจุด P นั้น ให้ O เป็นจุดขั้ว เส้นรังสี OX เป็นแกนเชิงขั้ว สามารถบอกตำแหน่งของจุด P บนระนาบโดยคู่อันดับ ( $r, \theta$ ) โดยที่  $r$  เป็นระยะที่จุดห่างจากจุดขั้ว และ  $\theta$  เป็นขนาดของมุมที่จุดขั้วของ OP กับแกนเชิงขั้ว ดังรูปที่ 1



ให้มุมที่วัดจากแกนเชิงขั้วไปยังรังสี OP วัดทวนเข็มนาฬิกามีขนาดของมุมเป็นจำนวนบวก เมื่อนำแกนเชิงขั้ววางบนแกน X ของระบบพิกัดฉาก โดยให้จุดขั้วอยู่ที่จุดกำเนิด O ดังรูปที่ 2

3. ครูให้นักเรียนเขียนพิสูจน์จากรูปที่ 2 ในข้อ 2. ได้ดังนี้

เมื่อกำหนดให้  $z = a + bi$

$$\text{จะพบว่า } \cos \theta = \frac{a}{r}$$

$$\text{ดังนั้น } a = r \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{b}{r}$$

$$\text{ดังนั้น } b = r \sin \theta$$

เราจึงสามารถเขียน  $z = a + bi$  ในรูปของ  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

โดยเรียกมุม  $\theta$  ว่าอาร์กิวเมนต์ (argument) ของ  $z$  ใช้สัญลักษณ์  $\text{Arg}(z)$

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

4. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน และแบบฝึกทักษะที่ 1.5 ข้อ 1 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นนักเรียนและครูร่วมกันเฉลยคำตอบพร้อมกัน โดยครูเขียนคำตอบบนกระดาน

### ชั่วโมงที่ 2

### ขั้นรู้ (Knowing)

5. ครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 23 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นครูถามนักเรียนว่าเมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนมาให้แล้วสามารถหาขนาดของมุม ( $\theta$ ) ได้อย่างไร

(แนวคำตอบ: สามารถหาได้โดย

1) วาดรูปแล้วพิจารณาว่าอยู่ในจุดภาคใด

2) หา  $\theta$  จากค่าของ  $\tan \theta = \frac{b}{a}$  แล้วนำมาเทียบกับค่าขนาดของมุม  $\theta$  ตามการอ่านมุมในวงกลม)

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

6. ครูให้นักเรียนทำใบงานที่ 1.5.1 เรื่อง การหาค่า  $r$  และ  $\theta$  ของจำนวนเชิงซ้อน จากนั้นครูสุ่มเรียกนักเรียน เพื่อบอกคำตอบแล้วให้นักเรียนทุกคนตรวจสอบคำตอบของตนเอง

### ชั่วโมงที่ 3

### ขั้นรู้ (Knowing)

7. ครูให้นักเรียนพิจารณาทฤษฎีบทของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว ดังนี้

ให้  $z$ ,  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน

$$1) z_1 z_2 = r_1 r_2 [r \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$2) \frac{1}{z} = \frac{1}{r} (\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$3) \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [r \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \text{ เมื่อ } z_2 \neq 0$$

$$4) \bar{z} = r[(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))]$$

8. ครูยกตัวอย่างการหาค่า  $\bar{z}$  ในรูปเชิงขั้ว เช่น  $z = \sqrt{3} - i$

แนวคิด หา  $r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

หา  $\theta_1$  โดยพิจารณา  $\tan \theta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$  (พิจารณาในจุดภาคที่ 4)

จะได้ว่า  $\tan 30^\circ = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

ดังนั้น  $\theta_1 = 330^\circ$  หรือ  $\frac{11\pi}{6}$

จะได้  $z = 2(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})$

แต่เราต้องการ  $\bar{z} = \sqrt{3} + i$

จาก  $r = 2$

หา  $\theta_2$  โดยพิจารณา  $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$  (พิจารณาในจุดภาคที่ 1)

ดังนั้น  $\theta = \frac{\pi}{6}$

จะได้  $\bar{z} = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$

หรือ  $\bar{z} = 2(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า  $\bar{z} = r[(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))]$

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

9. ครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 24 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน เพื่อสังเกตวิธีการหาค่าผลคูณและผลหารของ จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงชี้ จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนลงมือทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

10. ครูให้นักเรียนจับกลุ่ม กลุ่มละ 3-4 คน จากนั้นช่วยกันทำแบบฝึกทักษะ 1.5 ข้อ 2,3 ในหนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน แล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลย บนกระดาน

11. ครูถามคำถามนักเรียนหลังจากการแบบฝึกหัด ดังนี้

- นักเรียนคิดว่าการหาผลคูณและผลหารในรูปจำนวนเชิงซ้อนกับรูปเชิงชี้ แบบใดง่ายกว่ากัน  
(แนวคำตอบ: รูปจำนวนเชิงซ้อนง่ายกว่า)
- แล้วนักเรียนคิดว่าเราจำเป็นต้องหาผลคูณและผลหารในรูปเชิงชี้ไปเพื่ออะไร  
(แนวคำตอบ: เพื่อใช้หาค่าในการกรณีที่จำนวนเชิงซ้อนนั้นยกกำลัง และเลขยกกำลังนั้นมีค่ามาก)

#### ชั่วโมงที่ 4

##### ขั้นรู้ (Knowing)

12. ครูให้นักเรียนพิจารณาทฤษฎีบทของเดอมัวร์ ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อนที่กล่าวไว้ว่า

$$z^n = r^n [(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))]$$

13. ครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 25 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อนเพื่อพิจารณาการเขียนจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้ ทฤษฎีบทของเดอมัวร์

##### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

14. ครูให้นักเรียนหาผลคูณและผลหารของจำนวนเชิงซ้อนที่มีเลขยกกำลัง โดยให้นักเรียนพิจารณา โจทย์ปัญหา ที่ต่อเนื่องจากตัวอย่างที่ 24 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้  $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$  และ  $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$  จากนั้นครูให้นักเรียน

หาค่าของ  $(z_1 z_2)^{12}$  และ  $\frac{z_1^{12}}{z_2^{12}}$

$$\text{แนวคิด} \text{ หาผลคูณจะได้ว่า } z_1 z_2 = 4\sqrt{3} \left( \cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right)$$

$$(z_1 z_2)^{12} = (4\sqrt{3})^{12} \left( \cos 12 \cdot \frac{23\pi}{12} + i \sin 12 \cdot \frac{23\pi}{12} \right)$$

$$= 4^{12} 3^6 (\cos 23\pi + i \sin 23\pi)$$

$$= 3^6 4^{12} (-1 + 0i)$$

$$\begin{aligned}
&= -3^6 4^{12} \\
\text{หาผลหารจะได้ว่า } \frac{z_1}{z_2} &= \sqrt{3} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) \\
\frac{z_1^{12}}{z_2^{12}} &= (\sqrt{3})^{12} \left( \cos 12 \cdot \frac{19\pi}{12} + i \sin 12 \cdot \frac{19\pi}{12} \right) \\
&= 3^6 (\cos 19\pi + i \sin 19\pi) \\
&= 3^6 (-1 + 0i) \\
&= -3^6
\end{aligned}$$

### ชั้นลงมือทำ (Doing)

15. ครูให้นักเรียนจับกลุ่ม กลุ่มละ 3-4 คน จากนั้นช่วยกันทำแบบฝึกทักษะ 1.5 ข้อ 4 ในหนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นนักเรียนและครูร่วมกันเฉลย บนกระดาน

### ขั้นสรุป

1. ครูให้นักเรียนบอกวิธีการเขียนจำนวนเชิงซ้อนให้อยู่ในรูปเชิงชี้
2. ครูให้นักเรียนบอกวิธีการหาค่าของอาร์กิวเมนต์ในจุดภาคต่าง ๆ

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่าง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) จำนวนเชิงซ้อนในรูป เชิงซ้อน	- ตรวจสอบใบงานที่ 1.5.1 - ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ 1.5	- ใบงานที่ 1.5.1 - แบบฝึกทักษะ 1.5	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
3) นำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน	- แบบประเมินการ นำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) พฤติกรรมการทำงาน กลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
6) คุณลักษณะอันพึง ประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่น ในการทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

### สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

#### สื่อการเรียนรู้

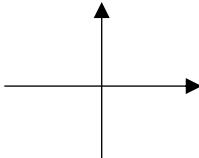
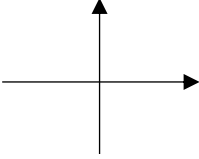
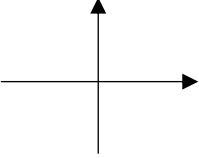
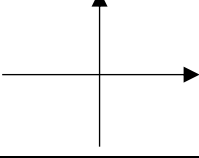
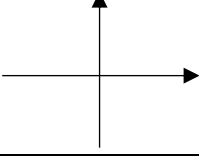
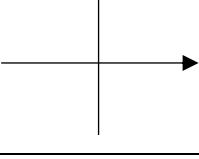
- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน
- 3) ใบงานที่ 1.5.1 เรื่องการหาค่า  $r$  และ  $\theta$  ของจำนวนเชิงซ้อน

#### แหล่งการเรียนรู้

-

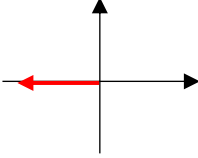
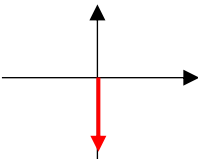
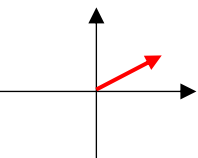
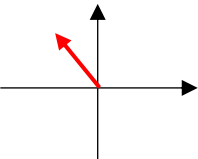
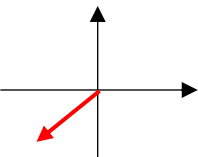
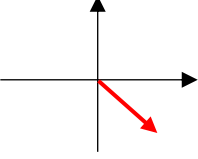
เรื่อง การหาค่า  $r$  และ  $\theta$  ของจำนวนเชิงซ้อน

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนเติมคำตอบในช่องว่างในแต่ละข้อต่อไปนี้

จำนวนเชิงซ้อน	ค่า a	ค่า b	วาดกราฟ	$\theta$	r
1. $z = -2$					
2. $z = 4i$					
3. $z = \sqrt{3} - i$					
4. $z = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$					
5. $z = -2 - 2i$					
6. $z = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$					

เรื่อง การหาค่า  $r$  และ  $\theta$  ของจำนวนเชิงซ้อน

คำชี้แจง : ให้นักเรียนเติมคำตอบในช่องว่างในแต่ละข้อต่อไปนี้

จำนวนเชิงซ้อน	ค่า a	ค่า b	วาดกราฟ	$\theta$	r
1. $z = -2$	-2	0		$\pi$	2
2. $z = -4i$	0	-4		$\frac{3\pi}{2}$	4
3. $z = \sqrt{3} - i$	$\sqrt{3}$	-1		$\frac{\pi}{6}$	2
4. $z = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$	1
5. $z = -2 - 2i$	-2	-2		$\frac{5\pi}{4}$	$2\sqrt{2}$
6. $z = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$		$\frac{7\pi}{4}$	$\sqrt{6}$



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

จำนวน 30 ชั่วโมง

เรื่อง รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

จำนวน 4 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

### ผลการเรียนรู้

หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนได้ (K)
- 2) เขียนรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้สัญลักษณ์แทนได้ (P)
- 3) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

### สาระการเรียนรู้

รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวน นับที่มากกว่า 1

### สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $\sqrt[n]{z}$

ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า  $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right]$

เมื่อ  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนใดๆ จะมี n ราก(คำตอบ)

1. ถ้า  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  เป็นรากที่ n ของ z แล้ว  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \dots = |z_n|$
2. ถ้า  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  เป็นรากที่ n ของ z แล้ว  $z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n = 0$

### สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการระบุ 2) ทักษะกระบวนการคิดแก้ปัญหา 3) ทักษะการเชื่อมโยง	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน
2. ความสามารถในการแก้ปัญหา	

## กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : อุปนัย (Inductive Method)

### ชั่วโมงที่ 1

#### ขั้นนำ

ขั้นการใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

1. ครูตั้งคำถามกับนักเรียน โดยมีแนวคำถาม ดังนี้

- รากที่สามของ  $-64$  มีคำตอบคือจำนวนใด

(แนวคำตอบ:  $-4$ )

2. ครูถามนักเรียนว่านักเรียนคิดว่ายังมีรากที่สามของ  $-64$  ที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนบ้างหรือไม่

3. ครูให้นักเรียนทำใบงาน 1.6.1 เรื่อง การหารากที่  $n$  เพื่อให้นักเรียนได้ทบทวนการหาค่าของรากที่ 3

โดยครูให้นักเรียนทำประมาณ 10 นาที จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยใบงาน

4. ครูทบทวนทฤษฎีบทของเดอมัวร์ ที่กล่าวไว้ว่า  $z^n = r^n [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$  นักเรียนสามารถนำไปหา รากที่  $n$  ของจำนวนเชิงซ้อนได้ โดยเขียนรากที่  $n$  ของจำนวนเชิงซ้อนให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว แล้วใช้ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์  $\sin \theta = \sin(\theta + 2k\pi)$  และ  $\cos \theta = \cos(\theta + 2k\pi)$  เมื่อ  $k = 0, 1, 2, n-1$

#### ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูกำหนดให้  $z = r(\cos \theta + i\sin \theta)$  เป็นรากที่สามของ  $-64$  เพราะว่า  $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = -64$   
เนื่องจาก  $-64 = 64(-1 + 0i)$

$$= 64(\cos \pi + i\sin \pi)$$

ดังนั้น  $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 64(\cos \pi + i\sin \pi)$

นั่นคือ  $r^3 = 64$  และ  $3\theta = \pi + 2k\pi$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนเต็ม

$$r = 4 \quad \text{เมื่อ} \quad \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$k = 0 \quad \text{จะได้} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$k = 1 \quad \text{จะได้} \quad \theta_2 = \pi$$

$$k = 2 \quad \text{จะได้} \quad \theta_3 = \frac{5\pi}{3}$$

จากที่กำหนดให้ รากที่สามของ  $-64$  แทนด้วย  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$\text{จะได้ } z_1 = 4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$z_2 = 4(\cos \pi + i \sin \pi) = 4(-1 + 0i) = -4 + 0i$$

$$z_3 = 4\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 - 2\sqrt{3}i$$

ดังนั้น รากที่สามของ  $-64$  คือ  $-4$ ,  $2 + 2\sqrt{3}i$  และ  $2 - 2\sqrt{3}i$

2. ครูกล่าวว่าจากการหารากที่สามของ  $-64$  ข้างต้นสามารถสรุปได้ตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

รากที่  $n$  ของจำนวนเชิงซ้อน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $\sqrt[n]{z}$

$$\text{ให้ } z \text{ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า } \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right]$$

เมื่อ  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$

จากทฤษฎีบท เราใช้สัญลักษณ์  $z^{\frac{1}{n}}$  แทนรากที่  $n$  ของจำนวนเชิงซ้อน  $z$

$$\text{จะได้ } z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right]$$

3. ครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 26 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน เพื่อสังเกตการหารากที่ 3 ของจำนวนเชิงซ้อน

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

4. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” และทำแบบฝึกทักษะ 1.6 ข้อ 1 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นครูสุ่มเรียกนักเรียนเพื่อบอกคำตอบ

## ชั่วโมงที่ 2

### ขั้นรู้ (Knowing)

5. ครูให้นักเรียนหาจำนวนเชิงซ้อน ( $z$ ) ที่สอดคล้องกับสมการของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1)  $(1 + 3i)z = -z - i$

2)  $z^8 + 4 + 4i = 0$

(แนวคำตอบ:

1)  $(1 + 3i)z = -z - i$

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2 - i}{1 + 3i} \\ &= \frac{-2 - i}{1 + 3i} \cdot \frac{1 - 3i}{1 - 3i} \\ &= \frac{-2 - i + 6i + 3i^2}{1 + 9} \\ &= \frac{-2 - i + 5i}{10} \\ &= \frac{-5 + 5i}{10} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{aligned}$$

2)  $z^8 + 4 + 4i = 0$

จะได้ว่า  $z^8 = -4 - 4i$

หา r จาก  $r = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{16+16} \\ &= \sqrt{32} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

หา  $\theta$  จาก  $\tan \theta = \frac{b}{a}$

$$\begin{aligned} &= \frac{-4}{-4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

จะได้  $\theta = \frac{\pi}{4}$

แต่เนื่องจากกราฟของจำนวนเชิงซ้อนอยู่ในจุดภาคที่ 3 ดังนั้น  $\theta = \frac{5\pi}{4}$

จาก  $z^8 = -4 - 4i$

และ  $-4 - 4i = 4\sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$

เมื่อแทน k ด้วย 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 และ 7

จะแทน z ด้วย  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8$  ตามลำดับ ดังนี้

เมื่อ  $k = 0$  จะได้  $z_1 = \sqrt[8]{4\sqrt{2}} \left( \cos \frac{5\pi}{32} + i \sin \frac{5\pi}{32} \right) = \sqrt[8]{4\sqrt{2}}$

$$\text{เมื่อ } k = 1 \text{ จะได้ } z_2 = \sqrt[8]{4\sqrt{2}} \left[ \cos \frac{5\pi+2\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi+2\pi}{8} \right]$$

$$= \sqrt[8]{4\sqrt{2}} \left[ \cos \frac{13\pi}{32} + i \sin \frac{13\pi}{32} \right]$$

$$\text{เมื่อ } k = 2 \text{ จะได้ } z_3 = \sqrt[8]{4\sqrt{2}} \left[ \cos \frac{5\pi+4\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi+4\pi}{8} \right]$$

$$= \sqrt[8]{4\sqrt{2}} \left[ \cos \frac{21\pi}{32} + i \sin \frac{21\pi}{32} \right]$$

$$\text{เมื่อ } k = 3 \text{ จะได้ } z_4 = \sqrt[8]{4\sqrt{2}} \left[ \cos \frac{5\pi+6\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi+6\pi}{8} \right]$$

$$= \sqrt[8]{4\sqrt{2}} \left[ \cos \frac{29\pi}{32} + i \sin \frac{29\pi}{32} \right]$$

$$\text{เมื่อ } k = 4 \text{ จะได้ } z_5 = \sqrt[8]{4\sqrt{2}} \left[ \cos \frac{5\pi+8\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi+8\pi}{8} \right]$$

$$= \sqrt[8]{4\sqrt{2}} \left[ \cos \frac{37\pi}{32} + i \sin \frac{37\pi}{32} \right]$$

$$\text{เมื่อ } k = 5 \text{ จะได้ } z_6 = \sqrt[8]{4\sqrt{2}} \left[ \cos \frac{5\pi+10\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi+10\pi}{8} \right]$$

$$= \sqrt[8]{4\sqrt{2}} \left[ \cos \frac{45\pi}{32} + i \sin \frac{45\pi}{32} \right]$$

$$\text{เมื่อ } k = 6 \text{ จะได้ } z_7 = \sqrt[8]{4\sqrt{2}} \left[ \cos \frac{5\pi+12\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi+12\pi}{8} \right]$$

$$= \sqrt[8]{4\sqrt{2}} \left[ \cos \frac{52\pi}{32} + i \sin \frac{52\pi}{32} \right]$$

$$\text{เมื่อ } k = 7 \text{ จะได้ } z_8 = \sqrt[8]{4\sqrt{2}} \left[ \cos \frac{5\pi+14\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi+14\pi}{8} \right]$$

$$= \sqrt[8]{4\sqrt{2}} \left[ \cos \frac{61\pi}{32} + i \sin \frac{61\pi}{32} \right]$$

6. ครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 27 และตัวอย่างที่ 28 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน เพื่อสังเกตวิธีการหารากที่ 4 ของจำนวนเชิงซ้อน

7. ครูให้นักเรียนพิจารณาจำนวนคำตอบของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ จะพบว่า

- 1) รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ จะมี n ราก(คำตอบ)
- 2) ถ้า  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  เป็นรากที่ n ของ z แล้ว  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \dots = |z_n|$
- 3) ถ้า  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  เป็นรากที่ n ของ z แล้ว  $z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n = 0$

**ขั้นเข้าใจ (Understanding)**

8. ครูให้นักเรียนจับคู่กันแล้วทำแบบฝึกทักษะ 1.6 ข้อ 2 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นนักเรียนและครูร่วมกันเฉลยคำตอบ

ชั่วโมงที่ 3

**ขั้นรู้ (Knowing)**

9. ครูถามนักเรียนว่าถ้าเราหารากที่  $n$  ของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ จะมีกี่คำตอบ

(แนวคำตอบ: มี  $n$  คำตอบ)

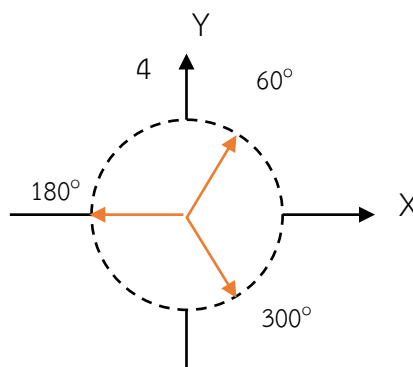
10. ครูถามต่อว่าเราจะสามารถแสดงเวกเตอร์แทนรากที่  $n$  ได้หรือไม่ อย่างไร

(แนวคำตอบ: ได้ โดยแสดงเวกเตอร์ ที่มีความยาว เท่ากับ  $\sqrt[n]{4r}$  หน่วย และมุมที่มีขนาด  $\frac{\theta}{r} + \frac{2k\pi}{n}$

เมื่อ  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ )

11. ครูให้นักเรียนสังเกตว่าเวกเตอร์แต่ละคู่จะอยู่ในลำดับที่ติดกันมีขนาดมุมห่างเท่ากันทุกคู่ ซึ่งเขียนแสดงได้ ดังนี้

$$r = 4 \quad \theta_1 = \frac{\pi}{3} \quad \theta_2 = \pi \quad \theta_3 = \frac{5\pi}{3}$$



**ขั้นเข้าใจ (Understanding)**

12. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำแนวข้อสอบ PAT1 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นให้นักเรียนช่วยกันอธิบาย แนวคิดของตนเองแล้วครูเขียนเฉลยบนกระดาน

13. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 3-4 คน ทำแบบฝึกทักษะ 1.6 ข้อ 3 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นครูสุ่มนักเรียนออกมาเขียนแสดงวิธีทำบนกระดาน

ชั่วโมงที่ 4

### ขั้นรู้ (Knowing)

14. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มกลุ่มละ 3-4 คน พิจารณาวิธีทำของตัวอย่างที่ 26 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน และให้แต่ละกลุ่มแสดงวิธีทำตามทฤษฎีบทที่สรุปได้ว่า

- รากที่  $n$  แทนด้วย  $z^n$  หาได้โดย  $r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right]$

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

15. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.6 ข้อ 4 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นครูสุ่มเรียกนักเรียนเพื่อบอกคำตอบ

16. ครูให้นักเรียนพิจารณาโจทย์แต่ละข้อในแบบฝึกทักษะ 1.6 ข้อ 2 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน ว่าสัญลักษณ์ในแต่ละข้อแทนการหารากที่เท่าใด

### ขั้นลงมือทำ (Doing)

17. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.6 ข้อ 5-6 ระดับท้าทาย ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นครูสุ่มเรียกนักเรียนเพื่อบอกคำตอบ

### ขั้นสรุป

1. ครูให้นักเรียนบอกสูตรการหารากที่  $n$  ของจำนวนเชิงซ้อน

(แนวคำตอบ: รากที่  $n$  ของจำนวนเชิงซ้อน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $\sqrt[n]{z}$  ให้  $z$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า  $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right]$  เมื่อ  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ )

2. ครูให้นักเรียนข้อสังเกตที่ได้จากการหารากของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด

(แนวคำตอบ: 1) รากที่  $n$  ของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ จะมี  $n$  ราก (คำตอบ)

2) ถ้า  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  เป็นรากที่  $n$  ของ  $z$  แล้ว  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \dots = |z_n|$

3) ถ้า  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  เป็นรากที่  $n$  ของ  $z$  แล้ว  $z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n = 0$

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่าง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) การหารากที่ n ของ จำนวนเชิงซ้อน	- ตรวจสอบใบงานที่ 1.6.1 - ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ 1.6	- ใบงานที่ 1.6.1 - แบบฝึกทักษะ 1.6	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) นำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน	- แบบประเมินการ นำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงาน , กลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึง ประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่น ในการทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

### สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

#### สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน
- 3) ใบงานที่ 1.6.1 เรื่อง การหารากที่ n

#### แหล่งการเรียนรู้

-



## เรื่อง การหารากที่ n

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนเติมคำตอบในช่องว่างในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. จงหาค่าของ

1)  $\sqrt[3]{-125}$

ตอบ .....

2)  $-\sqrt[3]{125}$

ตอบ .....

3)  $-\sqrt[3]{-125}$

ตอบ .....

4)  $\sqrt[3]{\frac{512}{729}}$

ตอบ .....

5)  $\sqrt[3]{-27x^3y^6}$

ตอบ .....

2. จงหารากที่ 3 ของ

1) 1

ตอบ .....

2) -0.008

ตอบ .....

3) 343

ตอบ .....

4) 100

ตอบ .....

## เรื่อง การหารากที่ n

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนเติมคำตอบในช่องว่างในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. จงหาค่าของ

1)  $\sqrt[3]{-125}$

ตอบ.....-5.....

2)  $-\sqrt[3]{125}$

ตอบ.....-5.....

3)  $-\sqrt[3]{-125}$

ตอบ-(-5) = 5.....

4)  $\sqrt[3]{\frac{512}{729}}$

ตอบ..... $\frac{8}{9}$ .....

5)  $\sqrt[3]{-27x^3y^6}$

ตอบ.....-3xy.....

2. จงหารากที่ 3 ของ

1) 1

ตอบ.....1.....

2) -0.008

ตอบ.....-0.2.....

3) 343

ตอบ.....7.....

4) 100

ตอบ..... $\sqrt{100}$ .....

## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

จำนวน 30 ชั่วโมง

เรื่อง สมการพหุนาม

จำนวน 5 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

### ผลการเรียนรู้

แก้สมการพหุนามตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสี่ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) หาคำตอบของสมการพหุนามตัวแปรเดียวได้ (K)
- 2) สามารถอธิบายลำดับขั้นตอนการแก้สมการพหุนามดีกรีไม่เกินสี่ โดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิต ทฤษฎีบทตัวประกอบและทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะได้ (P)
- 3) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

### สาระการเรียนรู้

สมการพหุนามตัวแปรเดียว

### สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

**ทฤษฎีบท ทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิต**

ให้  $p(x)$  เป็นพหุนามที่มีดีกรีมากกว่าหรือเท่ากับ 1 สมการ  $p(x) = 0$  จะมีคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อย 1 คำตอบ

**ทฤษฎีบท** ถ้า  $p(x)$  เป็นพหุนามดีกรี  $n$  เมื่อ  $n \geq 1$  แล้วสมการ  $p(x) = 0$  จะมีคำตอบทั้งหมด  $n$  คำตอบ เมื่อนับคำตอบที่ซ้ำกันด้วย

**ทฤษฎีบท ทฤษฎีบทตัวประกอบ**

กำหนด  $p(x)$  เป็นพหุนามที่มีดีกรีมากกว่าหรือเท่ากับ 1 จะได้ว่า พหุนาม  $p(x)$  มี  $x - c$  เป็นตัวประกอบก็ต่อเมื่อ  $p(c) = 0$

**ทฤษฎีบท ทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ**

กำหนด  $p(x)$  เป็นพหุนามในรูป  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

โดยที่  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง  $a_n \neq 0$

ถ้า  $x - \frac{k}{m}$  เป็นตัวประกอบของพหุนาม  $p(x)$  โดยที่  $m$  และ  $k$  เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง  $m \neq 0$  และ ห.ร.ม. ของ

$m$  และ  $k$  คือ 1 แล้ว  $m$  หาร  $a_n$  ลงตัว และ  $k$  หาร  $a_0$  ลงตัว

## ทฤษฎีบท

ให้  $p(x)$  เป็นพหุนามดีกรีมากกว่าหรือเท่ากับ 1 และสัมประสิทธิ์ทุกตัวเป็นจำนวนจริง ถ้า  $z$  เป็นคำตอบของสมการ  $p(x) = 0$  แล้ว สังยุคของ  $z$  จะเป็นคำตอบของสมการด้วย

### สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการวิเคราะห์ 2) ทักษะการเชื่อมโยง 3) ทักษะการนำความรู้ไปใช้	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน
2. ความสามารถในการแก้ปัญหา	

### กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : อุปนัย (Inductive Method)

### ชั่วโมงที่ 1

#### ขั้นนำ

##### ขั้นการใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

- ครูแจกใบงานที่ 1.7.1 ก เรื่อง ชนิดของฟังก์ชัน ให้นักเรียนจับคู่ชนิดของฟังก์ชันให้ถูกต้อง เพื่อให้ นักเรียนได้ทบทวนชนิดของฟังก์ชันต่าง ๆ
- ครูถามนักเรียนว่าเราเคยเรียนเรื่องการแก้สมการพหุนามยกกำลังมาแล้ว คำตอบที่ได้ เป็นจำนวนเชิงซ้อนได้หรือไม่

(แนวคำตอบ: ได้)

#### ขั้นสอน

##### ขั้นรู้ (Knowing)

- ครูกล่าวกับนักเรียนว่าวันนี้เราจะพิจารณาคำตอบของสมการพหุนาม หรือฟังก์ชันพหุนามที่มีคำตอบ จำนวนเชิงซ้อน ฟังก์ชันพหุนามเป็นฟังก์ชันที่เขียนในรูป... เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวกและศูนย์ และ  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  เป็นจำนวนจริง ถ้า  $a_n \neq 0$  จะกล่าวว่าพหุนามมีระดับชั้น (degree)  $n$  เมื่อกำหนด  $p(x) = 0$  คำตอบของสมการพหุนามจะเป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

2. ครูกล่าวถึงทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิต ดังนี้

**ทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิต** ให้  $p(x)$  เป็นพหุนามที่มีดีกรีมากกว่าหรือเท่ากับ 1 สมการ  $p(x) = 0$  จะมีคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อย 1 คำตอบ

จากทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิต จึงได้อีกทฤษฎีบทหนึ่ง ดังนี้

**ทฤษฎีบท** ถ้า  $p(x)$  เป็นพหุนามดีกรี  $n$  เมื่อ  $n \geq 1$  แล้วสมการ  $p(x) = 0$  จะมีคำตอบทั้งหมด  $n$  คำตอบ เมื่อนับคำตอบที่ซ้ำกันด้วย

3. ครูให้นักเรียนหาจำนวนคำตอบของสมการพหุนามจากตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่างที่ 1** ให้ออกจำนวนคำตอบและคำตอบของสมการต่อไปนี้

	จำนวนคำตอบ	คำตอบของสมการ
1) $x^2 - 25 = 0$	2 คำตอบ	5 , -5
2) $(x-1)(x+1) = 0$	2 คำตอบ	1 , -1
3) $x^2 + 3x + 4 = 0$	2 คำตอบ	4 , -1
4) $x^3 = 8$	1 คำตอบ 3 คำตอบ	2 (ในระบบจำนวนจริง) ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

**ขั้นเข้าใจ (Understanding)**

4. ครูให้นักเรียนหาจำนวนคำตอบทั้งหมดของสมการ  $(x - 5)(2x + 3)(x + i)(x - i)(x + 1)^2(x - 3)^3 = 0$  จากนั้นครูเรียกให้นักเรียนช่วยกันบอกคำตอบของสมการนี้

**(แนวคำตอบ:** เนื่องจากสมการนี้เป็นสมการพหุนามที่มีดีกรีเท่ากับ 9 จึงมีคำตอบทั้งหมด 9 คำตอบ

ได้แก่ คำตอบที่แตกต่างทั้งหมด 4 ค่า คือ  $5, \frac{-3}{2}, -i, i$  และ  $(-1)$  เป็นคำตอบซ้ำ 2 ค่า ส่วน 3 เป็นคำตอบซ้ำ 3 ค่า)

**ชั่วโมงที่ 2**

**ขั้นรู้ (Knowing)**

5. ครูให้นักเรียนหาคำตอบหาสมการต่อไปนี้

1)  $x^4 - 6x^2 - 40 = 0$

2)  $2x^3 - 6x^2 + 7x - 6 = 0$

(แนวตอบ:

$$1) x^4 - 6x^2 - 40 = 0$$

วิธีทำ  $(x^2 + 4)(x^2 - 10) = 0$

$$(x^2 + 4)(x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10}) = 0$$

$$\begin{array}{l|l|l} \text{จะได้ว่า } x^2 + 4 = 0 & x - \sqrt{10} = 0 & x + \sqrt{10} = 0 \\ x^2 = -4 & x = \sqrt{10} & x = -\sqrt{10} \\ x = \pm \sqrt{4i} & & \\ x = \pm 2i & & \end{array}$$

$$2) 2x^3 - 6x^2 + 7x - 6 = 0$$

วิธีทำ ให้  $p(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7x - 6 = 0$  มี  $a_n = 2$  และ  $a_0 = -6$

ตัวประกอบของ  $-6$  ( $k$ ) ได้แก่  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

ตัวประกอบของ  $2$  ( $m$ ) ได้แก่  $\pm 1, \pm 2$

จะได้ จำนวนในรูป  $\frac{k}{m}$  ที่อาจทำให้  $p\left(\frac{k}{m}\right) = 0$  ได้แก่  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } p(2) &= 2(2)^3 - 6(2)^2 + 7(2) - 6 \\ &= 16 - 24 + 14 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ  $x = 2$  เป็นคำตอบของสมการและ  $(x-2)$  เป็นตัวประกอบของ  $p(x)$

ซึ่ง  $\frac{p(x)}{x-2}$  เป็นผลหารที่หาผลลัพธ์ได้โดยการหารสังเคราะห์ ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2x^3 & -6x^2 & +7x & -6 \\ 2 & 2 & -6 & 7 & -6 \\ & & 4 & -4 & 6 \\ \hline & 2 & -2 & 3 & 0 \text{ (เศษ)} \end{array}$$

จะได้  $2x^2 - 2x + 3$  เป็นผลหาร

$$\text{ดังนั้น } 2x^3 - 6x^2 + 7x - 6 = (x - 2)(2x^2 - 2x + 3)$$

และหาคำตอบของสมการ  $x - 2 = 0$  หรือ  $2x^2 - 2x + 3 = 0$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } x = 2 \text{ หรือ } x &= \frac{-2(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} \\
 &= \frac{4 \pm \sqrt{4-24}}{4} \\
 &= \frac{4 \pm \sqrt{-20}}{4} \\
 &= \frac{4 \pm 2\sqrt{5}i}{4} \\
 &= 1 \pm \frac{\sqrt{5}i}{2}
 \end{aligned}$$

คำตอบของสมการคือ  $2, 1 + \frac{\sqrt{5}i}{2}, 1 - \frac{\sqrt{5}i}{2}$

6. ครูชี้ให้นักเรียนเห็นว่าจากตัวอย่างของสมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง จะสังเกตได้ว่า เมื่อมีค่า  $x = a + bi$  เป็นคำตอบ จะต้องมี  $x = a - bi$  เป็นคำตอบด้วยเสมอ

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

7. ครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 30 จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อนเพื่อตรวจสอบข้อสรุปจากการสังเกตที่ครูได้ชี้แนะไป

### ชั่วโมงที่ 3

### ขั้นรู้ (Knowing)

8. ครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

- กำหนดให้  $2 + \sqrt{3}i$  เป็นคำตอบของสมการ  $x^4 - 7x^2 + 20x + 14 = 0$  จงหาเซตคำตอบที่เหลือ

ทั้งหมด

#### แนวคิด

(1) ให้  $p(x) = x^4 - 7x^2 + 20x + 14$

(2) ถ้ามี  $2 + \sqrt{3}i$  เป็นคำตอบของสมการแล้วแสดงว่า  $2 - \sqrt{3}i$  เป็นคำตอบของสมการด้วย

นั่นคือ  $x = 2 + \sqrt{3}i$  และ  $x = 2 - \sqrt{3}i$  เป็นคำตอบของสมการ

จะได้ว่า  $(x - 2 - \sqrt{3}i)$  และ  $(x - 2 + \sqrt{3}i)$  เป็นตัวประกอบของสมการ

- ครูถามนักเรียนว่าค่าของ  $(x - 2 - \sqrt{3}i)(x - 2 + \sqrt{3}i)$  เป็นเท่าไร

- ครูถามนักเรียนต่อว่าถ้าต้องการหาผลคูณที่ง่ายขึ้นเราควรใช้ความรู้ในเรื่องใดมาช่วย

(แนวคำตอบ: จัดรูปเป็นผลต่างกำลังสอง ดังนี้  $(n-l)(n+l) = n^2 - l^2$ )

$$\begin{aligned} (3) \text{ นั่นคือ } ((x-2) - \sqrt{3i})(x-2) + \sqrt{3i} &= (x-2)^2 - (\sqrt{3i})^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 - 3(-1) \\ &= x^2 - 4x + 7 \end{aligned}$$

(4) นำ  $x^2 - 4x + 7$  ไปหาร  $p(x)$  โดยวิธีการหาผลหาร ดังนี้

$$\begin{array}{r} x^2 + 4x + 2 \\ x^2 - 4x + 7 \overline{) x^4 + 0x^3 - 7x^2 + 20x + 14} \\ \underline{x^4 - 4x^3 + 7x^2} \phantom{+ 20x + 14} \\ 4x^3 - 14x^2 + 20x \phantom{+ 14} \\ \underline{4x^3 - 16x^2 + 28x} \phantom{+ 14} \\ 2x^2 - 8x + 14 \\ \underline{2x^2 - 8x + 14} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{p(x)}{x^2 - 4x + 7} = 13x^2 + 4x + 2$$

ดังนั้น  $x^2 + 4x + 2$  เป็นตัวประกอบที่เหลืออยู่

$$\text{หาคำตอบของสมการ } x^2 + 4x + 2 = 0 \text{ โดยการใช้อนุกรม } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(2)}}{(2)(1)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} \\ &= -2 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

คำตอบที่เหลือคือ  $-2 + \sqrt{2}$  และ  $-2 - \sqrt{2}$

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

9. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มกลุ่มละ 3 - 4 คน พิจารณาตัวอย่างที่ 34 - 35 เพื่อตรวจสอบความเข้าใจ และให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.7 ข้อที่ 3, 4, 6.2, 6.4 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นครูสุ่มเรียกนักเรียนแต่ละกลุ่มให้อธิบายแนวคิด



## ชั่วโมงที่ 4

### ขั้นรู้ (Knowing)

10. ครูให้นักเรียนทุกคนสังเกตวิธีทำตัวอย่างที่ 36 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน โดยสังเกตสัมประสิทธิ์ของพหุนามที่ ไม่ใช่จำนวนจริงและสังเกตคำตอบที่ได้ทั้งหมด คือ  $\{-2, 1, i, i\}$

11. ครูถามนักเรียนว่ามีคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนหรือไม่

(แนวคำตอบ: มี คือ  $i$  ซึ่งมี 2 คำตอบ)

12. ครูถามนักเรียนว่ามีคำตอบที่เป็นสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนหรือไม่

(แนวคำตอบ: ไม่มี)

13. ครูให้นักเรียนสรุปคำตอบที่ได้จากสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงทั้งหมดกับคำตอบที่ได้จากสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน มีความแตกต่างกันอย่างไร

(แนวคำตอบ: 1. ถ้าสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง ถ้ามีคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน  $z = a + bi$  จะมีคำตอบที่สังยุค คือ  $z = a - bi$  ด้วยเสมอ

2. ถ้าสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อนก็ไม่จำเป็นที่จะต้องมีความคำตอบ 2 คำตอบคู่กัน)

14. ครูสรุปคำตอบของนักเรียนแล้วอธิบายทฤษฎีบทในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

ให้  $p(x)$  เป็นพหุนามดีกรีมากกว่าหรือเท่ากับ 1 และสัมประสิทธิ์ทุกตัวเป็นจำนวนจริง

ถ้า  $z$  เป็นคำตอบของสมการ  $p(x) = 0$  แล้ว สังยุคของ  $z$  จะเป็นคำตอบของสมการด้วย

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

15. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มกลุ่มละ 3 – 4 คน ทำแบบฝึกทักษะ 1.7 ข้อที่ 5 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อนจากนั้นครู และนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบบนกระดาน

## ชั่วโมงที่ 5

### ขั้นรู้ (Knowing)

16. ครูกล่าวทบทวนว่า เราสามารถหาคำตอบของสมการใดที่มีคำตอบเป็นจำนวนจริงหรือไม่ใช่จำนวนจริงได้ แล้วครูถามนักเรียนว่า

• ในทางกลับกันถ้าเราทราบคำตอบของสมการแล้วสามารถหาสมการพหุนามที่มีจำนวนที่กำหนดเป็นคำตอบ ได้หรือไม่

(แนวคำตอบ: ได้)

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

17. ครูให้นักเรียนพิจารณาสมการพหุนามที่ได้จากการกำหนดคำตอบของสมการมาให้จะมีดีกรีเป็นเท่าไร โดยให้นักเรียนทำใบงานที่ 1.7.1 ข จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยใบงาน

### ขั้นรู้ (Knowing)

18. ครูยกตัวอย่างให้นักเรียนได้ฝึกการหาสมการพหุนามจากการกำหนดคำตอบของสมการให้ ดังนี้

- คำตอบของสมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง มี 3, -4 และ  $3 + i$  เป็นคำตอบ

**แนวคิด** เนื่องจาก  $3 + i$  เป็นคำตอบ จะได้ว่า  $3 - i$  เป็นคำตอบของสมการด้วย

จะได้  $((x - 3) - i)((x - 3) + i)$  เป็นตัวประกอบของสมการ

และ  $(x - 3)(x + 4)$  เป็นตัวประกอบของสมการด้วย

ดังนั้น สมการพหุนามที่ได้จะต้องเป็นพหุนามดีกรี 4

นั่นคือ  $(x - 3)(x + 4)((x - 3) - i)((x - 3) + i) = 0$

$$(x^2 - x - 12)(x^2 - 6x + 10) = 0$$

$$x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 82x - 120 = 0$$

แต่ในการกำหนดให้สัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มใด ๆ เราจึงต้องกำหนดให้  $k$  เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

โดยคูณทั้ง สองข้างของสมการ ดังนี้  $k(x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 82x - 120) = 0$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนเต็ม

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

19. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.7 ข้อที่ 1-2 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลย คำตอบบนกระดาน

### ขั้นลงมือทำ (Doing)

20. ครูให้นักเรียนจับคู่ทำแบบฝึกทักษะ 1.7 ข้อที่ 8 ระดับท้าทาย ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นครูให้นักเรียนอธิบายแนวคิดในการหาคำตอบ

21. ครูให้นักเรียนแต่ละทำแบบทดสอบหลังเรียน หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

### ขั้นสรุป

1. ครูให้นักเรียนร่วมกันสรุปความรู้ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน แล้วเขียนผังมโนทัศน์ลงในกระดาษ A4
2. ครูให้นักเรียนตรวจสอบความเข้าใจของตนเอง โดยใช้แบบประเมินในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

## การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
1. การประเมินชิ้นงาน/ ภาระงาน (รวบยอด) - ผังมโนทัศน์ หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน	- ตรวจผังมโนทัศน์ หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน	- แบบประเมินชิ้นงาน /ภาระงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
2. ประเมินระหว่าง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้			
1) สมการพหุนาม	- ตรวจใบงานที่ 1.7.1ก, 1.7.1ข - ตรวจแบบฝึกทักษะ 1.7	- ใบงานที่ 1.7.1ก, 1.7.1ข - แบบฝึกทักษะ 1.7	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) นำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน	- แบบประเมินการ นำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการ ทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการ ทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงาน กลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการ ทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการ ทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่น ในการทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

## สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

### สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน
- 3) ใบงานที่ 1.7.1ก เรื่อง ชนิดของฟังก์ชัน
- 4) ใบงานที่ 1.7.1ข เรื่อง สมการพหุนาม

### แหล่งการเรียนรู้

-

## ใบงาน 1.7.1 ก

### เรื่อง ชนิดของฟังก์ชัน

---

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนจับคู่วิธีรูปของฟังก์ชันต่างกับชนิดของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.  $p(x) = ax + b$

A. ฟังก์ชันคงที่

2.  $p(x) = ax^2 + bx + c$

B. ฟังก์ชันกำลังสอง

3.  $p(x) = b$

C. ฟังก์ชันกำลังสาม

4.  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

D. ฟังก์ชันตรรกยะ

5.  $p(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$

E. ฟังก์ชันพหุนาม

6.  $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx + d$

F. ฟังก์ชันเชิงเส้น

เรื่อง ชนิดของฟังก์ชัน

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนจับคู่โยงรูปของฟังก์ชันต่างกับชนิดของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้

- |                                   |  |                     |
|-----------------------------------|--|---------------------|
| 1. $p(x) = ax + b$                |  | A. ฟังก์ชันคงที่    |
| 2. $p(x) = ax^2 + bx + c$         |  | B. ฟังก์ชันกำลังสอง |
| 3. $p(x) = b$                     |  | C. ฟังก์ชันกำลังสาม |
| 4. $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  |  | D. ฟังก์ชันตรรกยะ   |
| 5. $p(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ |  | E. ฟังก์ชันพหุนาม   |
| 6. $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx + d$  |  | F. ฟังก์ชันเชิงเส้น |
-

ใบงาน 1.7.1 ข

เรื่อง สมการพหุนาม

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนพิจารณาว่าสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้มีดีกรีต่ำสุดของสมการเป็นเท่าไรจากคำตอบของสมการ

คำตอบของสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง	ดีกรีของสมการพหุนาม
1) $2, \frac{-1}{2}$	
2) $3, i$	
3) 1 ซ้ำ 2 ครั้ง และ $3 + i$	
4) $2, -5i, -3$ ซ้ำ 3 ครั้ง	

เรื่อง สมการพหุนาม

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนพิจารณาว่าสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้มีดีกรีต่ำสุดของสมการเป็นเท่าไรจากคำตอบของสมการ

คำตอบของสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง	ดีกรีของสมการพหุนาม
1) $2, \frac{-1}{2}$	ดีกรี 2
2) $3, i$	ดีกรี 3 เพราะมี $i$ และ $-i$ ด้วย
3) 1 ซ้ำ 2 ครั้ง และ $3 + i$	ดีกรี 4 เพราะมี 1 ซ้ำ 2 ครั้งจะเป็นดีกรี 2 และยังมี $3 + i$ และ $3 - i$ เป็นคำตอบอีก 2 ครั้ง
4) $2, -5i, -3$ ซ้ำ 3 ครั้ง	ดีกรี 6

## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

จำนวน 30 ชั่วโมง

เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

จำนวน 3 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ดลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

### ผลการเรียนรู้

เข้าใจและใช้หลักการบวกและการคูณ การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดหมู่ในการแก้ปัญหา

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) หาจำนวนวิธีทั้งหมดของการทำงานได้ (K)
- 2) ใช้หลักการบวกและการคูณในการแก้ปัญหาได้ (P)
- 3) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

### สาระการเรียนรู้

หลักการบวกและการคูณ

### สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

**หลักการคูณ** (เป็นการทำงานที่ต่อเนื่องกัน)

จำนวนวิธีการทำงานทั้งหมด = ผลคูณของจำนวนวิธีในแต่ละขั้นตอนย่อยๆ  
 $= n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$  วิธี

**หลักการบวก** (เป็นการทำงานที่ไม่ต่อเนื่องกัน)

จำนวนวิธีการทำงานทั้งหมด = ผลคูณของจำนวนวิธีในแต่ละแบบ  
 $= n_1 + n_2 + \dots + n_k$  วิธี

### สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร	1. มีวินัย
2. ความสามารถในการคิด	2. ใฝ่เรียนรู้
1) ทักษะการให้เหตุผล	3. มุ่งมั่นในการทำงาน
2) ทักษะการคิดคล่อง	
3) ทักษะกระบวนการคิดแก้ปัญหา	
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	



## กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : อุปนัย (Inductive Method)

### ชั่วโมงที่ 1

#### ขั้นนำ

1. ครูยกตัวอย่างเกี่ยวกับการหาจำนวนวิธีการทำงาน ถ้างานมีมากกว่า 1 ขั้นตอน เช่น เด็กชายวัชรธรรม มีเสื้ออยู่ 4 แบบ มีกางเกง 3 แบบ และมีรองเท้า 2 คู่ อยากทราบว่าเด็กชายวัชรธรรมจะมีวิธีการแต่งตัวโดยใส่เสื้อ กางเกงและรองเท้า ที่แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี หรือถ้าครูไปร้านอาหารมีอาหารคาว 3 ชนิด ขนมหวาน 2 ชนิด ให้เลือกอาหารคาวได้ 1 อย่าง และขนมหวาน 1 อย่าง ครูจะมีวิธีการเลือกได้กี่แบบ
2. ครูแจกใบงานที่ 2.1.1 เรื่อง การนับเบื้องต้น เมื่อนักเรียนทำใบงานเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

#### ขั้นสอน

##### ขั้นสอนหรือแสดง

1. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปวิธีการหาจำนวนในการทำงานถ้างานนั้นมีหลายขั้นตอนจากใบงานที่นักเรียนทำโดยครูถามนักเรียนดังนี้
  - ถ้านักเรียนมีการทำงาน  $k$  ขั้นตอนและแต่ละขั้นตอนมีวิธีดำเนินการได้  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$  วิธีนักเรียนสามารถหาวิธีการทำงานทั้งหมดได้โดยใช้วิธีใดบ้าง  
(แนวคำตอบ: เขียนแผนภาพและการคำนวณ)
  - การหาจำนวนวิธีการทำงานด้วยการเขียนแผนภาพและการคำนวณ แบบใดสะดวกและรวดเร็วกว่ากัน  
(แนวคำตอบ: การคำนวณ)
  - ดังนั้น ถ้าเราจะหาวิธีการทำงานโดยการคำนวณหาจะมีวิธีการคิดอย่างไร  
(แนวคำตอบ: นำจำนวนวิธีในการทำงานแต่ละขั้นตอนมาคูณกันทั้งหมด)
2. ครูอธิบายนักเรียนว่าการหาจำนวนวิธีการทำงานเช่นนี้เป็นหลักเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับที่ใช้หลักการคูณ ซึ่งสรุปเป็นหลักการคูณได้ว่า “ถ้าการทำงานอย่างหนึ่งประกอบไปด้วยการทำงาน  $k$  ขั้นตอน โดยการทำงานในแต่ละขั้นตอนจะทำต่อเนื่องกันหรือทำไปพร้อมๆกัน ซึ่งวิธีการทำงานในแต่ละขั้นตอนนั้นแตกต่างกัน คือ

การทำงานขั้นตอนที่ 1 มีวิธีทำ  $n_1$  วิธี

การทำงานขั้นตอนที่ 2 มีวิธีทำ  $n_2$  วิธี

⋮

การทำงานขั้นตอนที่  $k$  มีวิธีทำ  $n_k$  วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีการทำงานทั้งหมด เท่ากับ  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$  วิธี”

3. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 2–6 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น แล้วให้นักเรียนฝึกวาดแผนภาพและคำนวณหาคำตอบตามไปด้วย ถ้าตัวอย่างข้อใดที่นักเรียนไม่เข้าใจครูจะอธิบายและแสดงวิธีหาคำตอบให้นักเรียนดูบนกระดานตัวอย่างละเอียด

4. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” และแบบฝึกทักษะ 2.1 ข้อ 1–7 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น จากนั้นนักเรียนและครูร่วมกันเฉลยคำตอบ

## ชั่วโมงที่ 2

### ขั้นสอนหรือแสดง

5. ครูให้นักเรียนฝึกแต่งโจทย์ที่ใช้หลักการคูณ โดยแบ่งนักเรียนเป็น 2 กลุ่ม ส่งตัวแทนจากแต่ละกลุ่ม กลุ่มละ 1 คน โดยกลุ่มแรกเป็นผู้แต่งโจทย์ กลุ่มที่สองเป็นผู้หาคำตอบ สลับกันแต่งโจทย์และหาคำตอบประมาณ 5 ข้อ เพื่อเป็นการฝึกให้นักเรียนได้คิดสถานการณ์ที่เป็นประสบการณ์ของนักเรียนเอง ในการนำมาใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับกฎเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ โดยใช้หลักการคูณ ซึ่งครูร่วมเฉลยคำตอบที่นักเรียนแต่งโจทย์ขึ้น

6. ครูให้นักเรียนร่วมกันสรุปหลักการคูณอีกครั้งว่า

จำนวนวิธีการทำงานทั้งหมด = ผลคูณของจำนวนวิธีในแต่ละขั้นตอนย่อยๆ

$$= n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k \text{ วิธี}$$

7. ครูให้นักเรียนพิจารณาการสร้างจำนวน 3 หลัก จากเลขโดด 0, 1 และ 2 โดยวิธีเขียนแผนภาพซึ่งมีเงื่อนไข ดังนี้

- 1) ใช้ตัวเลขในแต่ละหลักซ้ำกันได้
- 2) ใช้ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน
- 3) เป็นจำนวนคู่และใช้ตัวเลขในแต่ละหลักซ้ำกันได้

จากนั้นครูถามนักเรียนก่อนว่า

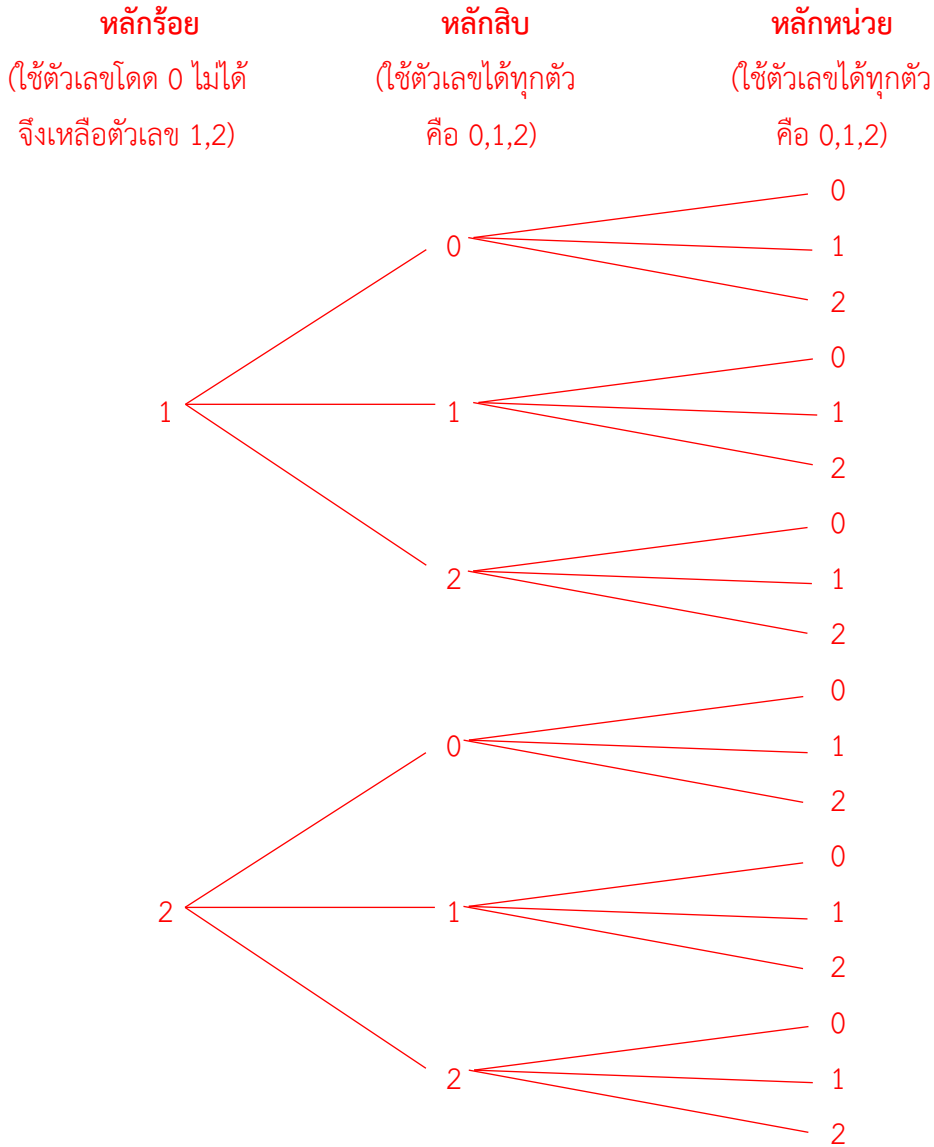
- ถ้านักเรียนใช้วิธีการเขียนแผนภาพ การทำงานจะมีกี่ขั้นตอน อะไรบ้าง

(แนวคำตอบ: 3 ขั้นตอน คือ การสร้างเลขในหลักร้อย หลักสิบและหลักหน่วย)

- เราควรสร้างแผนภาพเริ่มจากหลักใดเป็นงานขั้นที่ 1,2 และ 3 ตามลำดับ  
(แนวคำตอบ: หลักร้อย หลักสิบและหลักหน่วย) หรือ (หลักหน่วย หลักสิบและหลักร้อย)

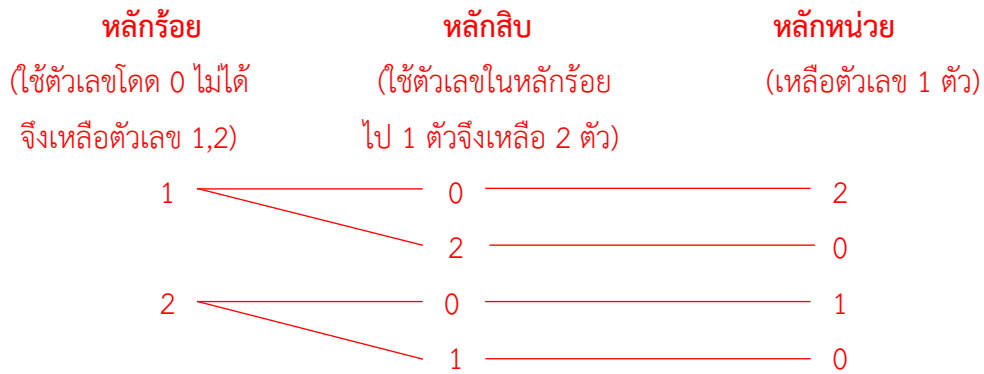
**แนวคิด**

1) ใช้ตัวเลขในแต่ละหลักซ้ำกันได้



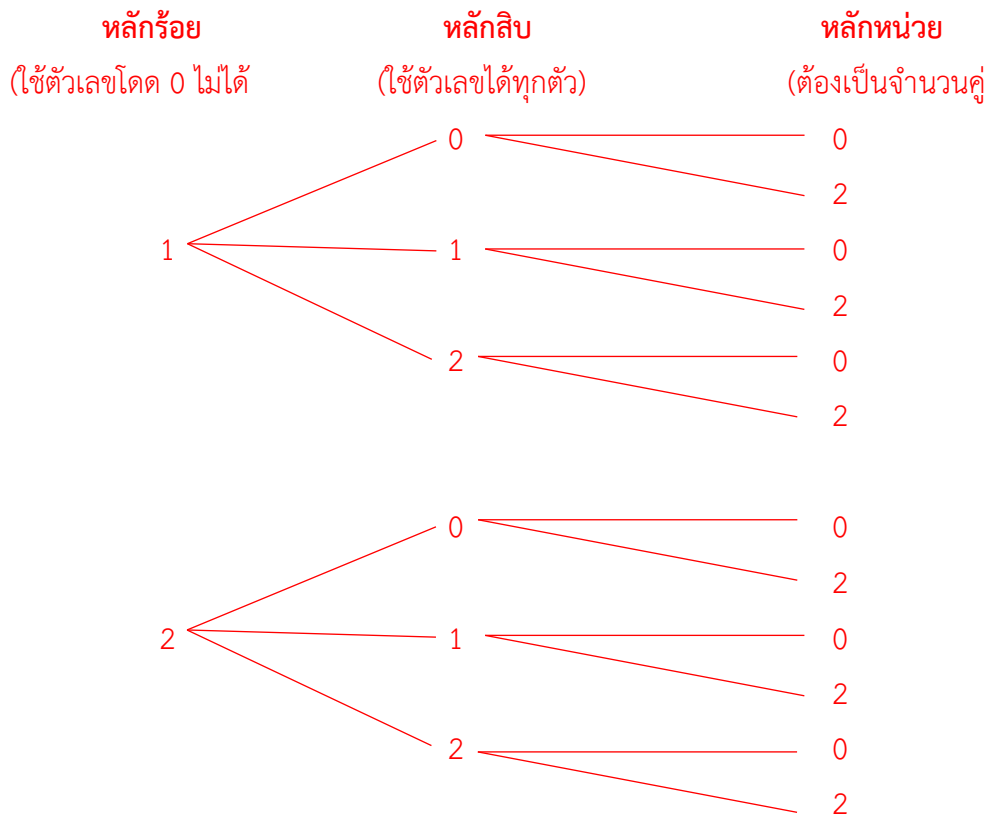
ดังนั้น จะได้จำนวนวิธีทั้งหมด 18 วิธี

2) ใช้ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน



ดังนั้น จะได้จำนวนวิธีทั้งหมด 4 วิธี

3) เป็นจำนวนคู่และใช้ตัวเลขในแต่ละหลักซ้ำกันได้



ดังนั้น จะได้จำนวนวิธีทั้งหมด 12 วิธี)

8. ครูถามนักเรียนว่าจากโจทย์การสร้างตัวเลขที่ครูกำหนดให้โดยใช้การเขียนแผนภาพ ถ้าเราใช้หลักการคูณใน การคำนวณได้หรือไม่ อย่างไร

(แนวคำตอบ: ได้โดย

1) ใช้ตัวเลขในแต่ละหลักซ้ำกันได้

การสร้างจำนวนที่มีสามหลักโดยใช้ตัวเลขในแต่ละหลักซ้ำกันได้ มี 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลักร้อย จะเลือกได้ 2 วิธี (ไม่ใช่เลข 0)

ขั้นที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลักสิบ จะเลือกได้ 3 วิธี (ได้แก่ 0,1,2)

ขั้นที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลักหน่วย จะเลือกได้ 3 วิธี (ได้แก่ 0,1,2)

ดังนั้น จำนวนที่มีสามหลักที่สร้างได้ทั้งหมดเท่ากับ  $2 \times 3 \times 3 = 18$  วิธี

2) ใช้ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

การสร้างจำนวนที่มีสามหลักโดยใช้ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน มี 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลักร้อย จะเลือกได้ 2 วิธี (ไม่ใช่เลข 0)

ขั้นที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลักสิบ จะเลือกได้ 2 วิธี (เหลือตัวเลข 2 ตัว)

ขั้นที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลักหน่วย จะเลือกได้ 1 วิธี (เหลือตัวเลข 1 ตัว)

ดังนั้น จำนวนที่มีสามหลักที่สร้างได้ทั้งหมดเท่ากับ  $2 \times 2 \times 1 = 4$  วิธี

3) เป็นจำนวนคู่และใช้ตัวเลขในแต่ละหลักซ้ำกันได้

การสร้างจำนวนที่มีสามหลักเป็นจำนวนคู่และใช้ตัวเลขในแต่ละหลักซ้ำกันได้ มี 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลักร้อย จะเลือกได้ 2 วิธี (ไม่ใช่เลข 0)

ขั้นที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลักสิบ จะเลือกได้ 3 วิธี (ได้แก่ 0,1,2)

ขั้นที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลักหน่วย จะเลือกได้ 2 วิธี (ได้แก่ 0,2)

ดังนั้น จำนวนที่มีสามหลักที่สร้างได้ทั้งหมดเท่ากับ  $2 \times 3 \times 2 = 12$  วิธี)

9. ครูให้นักเรียนแต่ละทำ “ลองคำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น จากนั้นนักเรียนและครูร่วมกันเฉลยคำตอบ โดยครูสุ่มเรียกนักเรียน มาเขียนคำตอบบนกระดาน

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นสอนหรือแสดง

10. ครูให้นักเรียนพิจารณาในการสร้างจำนวนจากตัวเลขโดดที่กำหนดให้ โดยเลขโดดแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน จะมีจำนวนเท่ากับจำนวนวิธีที่สร้างจำนวนโดยเลขโดดแต่ละหลักซ้ำกันได้

(แนวคำตอบ: ไม่เท่ากัน เช่นจากตัวอย่างในชั่วโมงที่ 2)

11. ครูยกตัวอย่างให้นักเรียนสร้างจำนวนสามหลักจากเลขโดด 0,1,2 โดยมีคำถามว่า

- 1) เป็นเลขคี่และใช้เลขโดดแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน
- 2) เป็นเลขคี่และใช้เลขโดดแต่ละหลักซ้ำกันได้
- 3) เป็นเลขคู่และใช้เลขโดดแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

12. ครูให้นักเรียนหาคำตอบในข้อ 1) และข้อ 2)

(แนวคิด 1) เป็นเลขคี่และใช้เลขโดดแต่ละหลักซ้ำกันได้

การสร้างจำนวนที่มีสามหลักเป็นเลขคี่โดยใช้ตัวเลขในแต่ละหลักซ้ำกันได้ มี 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลักร้อย จะเลือกได้ 2 วิธี (ไม่ใช่เลข 0)

ขั้นที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลักสิบ จะเลือกได้ 3 วิธี (ได้แก่ 0,1,2)

ขั้นที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลักหน่วย จะเลือกได้ 1 วิธี (ได้แก่ 1)

ดังนั้น จำนวนที่มีสามหลักที่สร้างได้ทั้งหมดเท่ากับ  $2 \times 3 \times 1 = 6$  วิธี

2) เป็นเลขคี่และใช้เลขโดดแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

การสร้างจำนวนที่มีสามหลักเป็นเลขคี่และใช้เลขโดดแต่ละหลักไม่ซ้ำกันมี 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลักหน่วย จะเลือกได้ 1 วิธี (เลข 1)

ขั้นที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลักร้อย จะเลือกได้ 1 วิธี (เลข 2)

ขั้นที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลักสิบ จะเลือกได้ 1 วิธี (เลข 0)

ดังนั้น จำนวนที่มีสามหลักที่สร้างได้ทั้งหมดเท่ากับ  $1 \times 1 \times 1 = 1$  วิธี

13. ครูให้นักเรียนทำโจทย์คำถามในข้อ 3) ต่อ

(แนวคิด 3) เป็นเลขคู่และใช้เลขโดดแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

เนื่องจากตัวเลขแต่ละหลักไม่ซ้ำกันจึงต้องแยกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ใช้เลข 0 ในหลักหน่วย

ขั้นที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลักหน่วย จะเลือกได้ 1 วิธี (เลข 0)

ขั้นที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลักร้อยจะเลือกได้ 2 วิธี (เลข 1,2 )

ขั้นที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลัก สิบจะเลือกได้ 1 วิธี (เหลือตัวเลข 1 ตัว)

ดังนั้น จำนวนที่มีสามหลักที่สร้างได้ทั้งหมดเท่ากับ  $1 \times 2 \times 1 = 2$  วิธี

กรณีที่ 2 ใช้เลข 2 ในหลักหน่วย

ขั้นที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลักหน่วย จะเลือกได้ 1 วิธี (เลข 2)

ขั้นที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลักร้อยจะเลือกได้ 1 วิธี (เลข 1 )

ขั้นที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว วางที่หลัก สิบจะเลือกได้ 1 วิธี (เลข 0)

ดังนั้น จำนวนที่มีสามหลักที่สร้างได้ทั้งหมดเท่ากับ  $1 \times 1 \times 1 = 1$  วิธี

14. จากแนวคิดที่แยกการหาคำตอบเป็น 2 กรณี แล้วนักเรียนจะนำคำตอบในแต่ละกรณีมาดำเนินการอย่างไร

(แนวคำตอบ: นำมาบวกกัน เนื่องจากวิธีการทำงานในแต่ละกรณีเป็นการทำงานที่เสร็จสิ้นแล้ว และในแต่ละกรณีก็เป็นการทำงานที่ไม่ต่อเนื่องกัน ดังนั้น จึงนำจำนวนวิธีในแต่ละกรณีมาบวกกัน)

15. ดังนั้นครูให้นักเรียนสรุปคำตอบจำนวนวิธีในการสร้างเลขคู่สามหลักและใช้เลขโดดแต่ละหลักไม่ซ้ำกันในข้อตัวอย่างข้างต้น

(แนวคำตอบ: จำนวนวิธีเท่ากับ  $2 + 1 = 3$  วิธี)

16. ครูให้นักเรียนสรุปหลักการบวก ดังนี้

ถ้าการทำงานหนึ่งมีวิธีการทำงานได้ทั้งหมด  $k$  แบบ ตั้งแต่แบบที่ 1 ถึงแบบที่  $k$  โดยที่  
การทำงานแบบที่ 1 มีวิธีทำ  $n_1$  วิธี  
การทำงานแบบที่ 2 มีวิธีทำ  $n_2$  วิธี  
⋮  
การทำงานแบบที่  $k$  มีวิธีทำ  $n_k$  วิธี

โดยการทำงานแต่ละแบบมีวิธีที่แตกต่างกัน และสามารถเลือกวิธีการทำงานได้เพียงแบบใดแบบหนึ่งเท่านั้น ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะทำงานนี้ทั้งหมดเท่ากับ  $n_1 + n_2 + \dots + n_k$  วิธี

17. ครูยกตัวอย่างโจทย์ปัญหา ดังนี้

1) นาย ก. เดินทางจากบ้านไปทำงาน โดยไปทางบกแล้วไปต่อทางเรือ มีวิธีการเดินทางบกได้ 3 วิธี ได้แก่ เดินรถสองแถว และรถจักรยานยนต์รับจ้าง เมื่อถึงท่าเรือมีเรือไปยังที่ทำงานได้ 2 แบบ คือ เรือด่วน เรือเร็ว

2) นาย ข. เดินทางจากบ้านไปทำงาน โดยไปทางบกมีวิธีการเดินทางได้ 3 วิธี ได้แก่ เดิน รถสองแถว และรถจักรยานยนต์รับจ้าง หรือไปทางเรือได้ 2 แบบ คือ เรือด่วน เรือเร็ว

18. ครูให้นักเรียนพิจารณาว่าข้อ 1) และข้อ 2) เป็นการใช้หลักการนับเบื้องต้น เรื่องการบวกหรือการคูณ  
(แนวคำตอบ: ข้อ 1) เป็นหลักการคูณ ข้อ 2) เป็นหลักการบวก )

19. ครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 7 จากนั้นให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น เพื่อตรวจสอบความเข้าใจ

20. ให้นักเรียนจับคู่กันแล้วทำแบบฝึกทักษะ 2.1 ข้อ 8 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น จากนั้นนักเรียนและครูร่วมกันเฉลยคำตอบ

### ขั้นสรุป

1. ครูให้นักเรียนบอกกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับว่ามีอะไรบ้าง
2. ครูให้นักเรียนสรุปขั้นตอนของการสร้างตัวเลข 3 หลักจากเลขโดด

## การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
1. การประเมินก่อนเรียน - แบบทดสอบก่อนเรียน หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น	- ตรวจสอบแบบทดสอบ ก่อนเรียน	- แบบทดสอบก่อนเรียน	- ประเมินตามสภาพจริง
2. ประเมินระหว่าง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) กฎเกณฑ์เบื้องต้น เกี่ยวกับการนับ	- ตรวจสอบใบงานที่ 2.1.1 - ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ 2.1	- ใบงานที่ 2.1.1 - แบบฝึกทักษะ 2.1	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) นำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน	- แบบประเมินการ นำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการ ทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการ ทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงาน กลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการ ทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการ ทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่น ในการทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

## สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

### สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น
- 3) ใบงานที่ 2.1.1 เรื่อง การนับเบื้องต้น

### แหล่งการเรียนรู้

-



## ใบงาน 2.1.1

### เรื่อง การนับเบื้องต้น

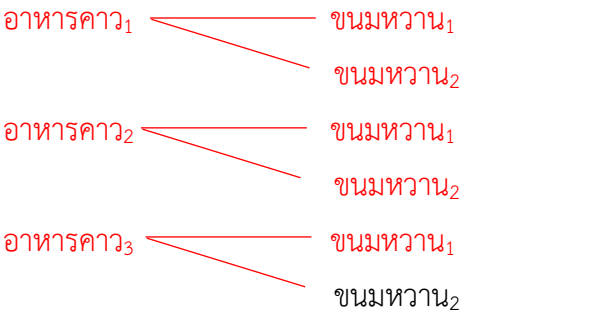
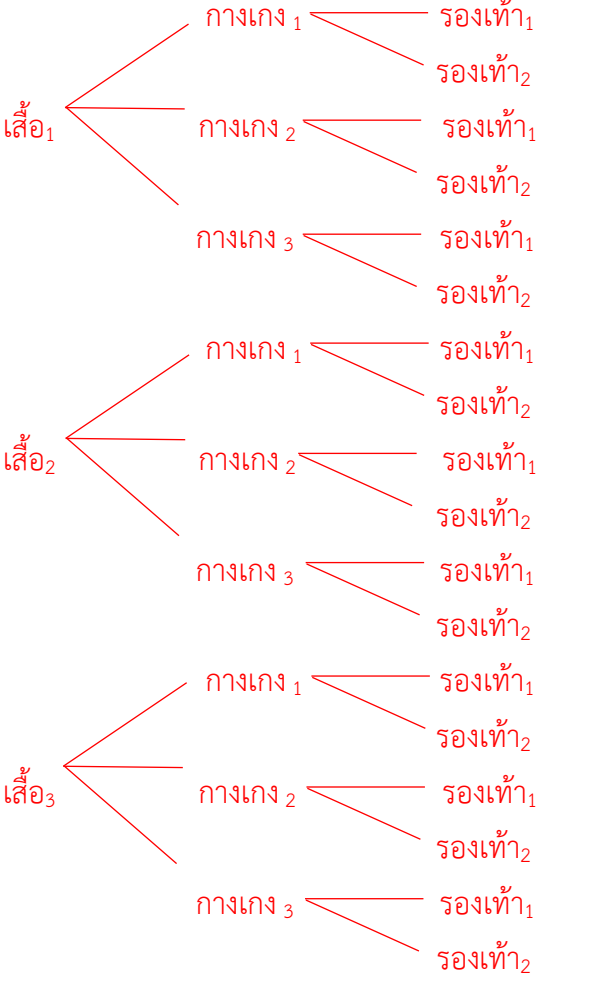
คำชี้แจง : ให้นักเรียนแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละข้อต่อไปนี้

ปัญหา	เขียนแผนภาพ	คำนวณ
1. ครูเลือกรับประทานอาหารโดยมี อาหารคาว 3 ชนิด และขนมหวาน 2 ชนิด		
2. นักเรียนแต่งตัวโดยมีเสื้ออยู่ 4 แบบ มีกางเกง 3 แบบ และมีรองเท้า 2 คู่		
3. คนทำงานเลือกวิธีการไปโรงเรียน คุณแป้มต้องออกจากซอยมายัง ถนนใหญ่มีวิธีการเดินทางได้ 3 วิธี คือ ขี่จักรยาน รถรับจ้าง และเดิน เมื่อมาถึงถนนใหญ่มีวิธีการเดินทาง ไปถึงโรงเรียนได้ 4 วิธี คือ รถประจำทางธรรมดา รถประจำ ทางปรับอากาศ รถตู้ และรถแท็กซี่		

ใบงาน 2.1.1

เรื่อง การนับเบื้องต้น

คำชี้แจง : ให้นักเรียนแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละข้อต่อไปนี้

ปัญหา	เขียนแผนภาพ	คำนวณ
<p>1. ครูเลือกรับประทานอาหารโดยมีอาหาร คาว 3 ชนิด และขนมหวาน 2 ชนิด</p>	 <pre> graph LR     A1[อาหารคาว<sub>1</sub>] --- B1[ขนมหวาน<sub>1</sub>]     A1 --- B2[ขนมหวาน<sub>2</sub>]     A2[อาหารคาว<sub>2</sub>] --- B3[ขนมหวาน<sub>1</sub>]     A2 --- B4[ขนมหวาน<sub>2</sub>]     A3[อาหารคาว<sub>3</sub>] --- B5[ขนมหวาน<sub>1</sub>]     A3 --- B6[ขนมหวาน<sub>2</sub>]         </pre>	<p><math>3 \times 2 = 6</math></p>
<p>2. นักเรียนแต่งตัวโดยมีเสื้ออยู่ 4 แบบ มีกางเกง 3 แบบ และมีรองเท้า 2 คู่</p>	 <pre> graph LR     S1[เสื้อ<sub>1</sub>] --- G1[กางเกง<sub>1</sub>]     S1 --- G2[กางเกง<sub>2</sub>]     S1 --- G3[กางเกง<sub>3</sub>]     G1 --- R1[รองเท้า<sub>1</sub>]     G1 --- R2[รองเท้า<sub>2</sub>]     G2 --- R3[รองเท้า<sub>1</sub>]     G2 --- R4[รองเท้า<sub>2</sub>]     G3 --- R5[รองเท้า<sub>1</sub>]     G3 --- R6[รองเท้า<sub>2</sub>]          S2[เสื้อ<sub>2</sub>] --- G7[กางเกง<sub>1</sub>]     S2 --- G8[กางเกง<sub>2</sub>]     S2 --- G9[กางเกง<sub>3</sub>]     G7 --- R7[รองเท้า<sub>1</sub>]     G7 --- R8[รองเท้า<sub>2</sub>]     G8 --- R9[รองเท้า<sub>1</sub>]     G8 --- R10[รองเท้า<sub>2</sub>]     G9 --- R11[รองเท้า<sub>1</sub>]     G9 --- R12[รองเท้า<sub>2</sub>]          S3[เสื้อ<sub>3</sub>] --- G13[กางเกง<sub>1</sub>]     S3 --- G14[กางเกง<sub>2</sub>]     S3 --- G15[กางเกง<sub>3</sub>]     G13 --- R13[รองเท้า<sub>1</sub>]     G13 --- R14[รองเท้า<sub>2</sub>]     G14 --- R15[รองเท้า<sub>1</sub>]     G14 --- R16[รองเท้า<sub>2</sub>]     G15 --- R17[รองเท้า<sub>1</sub>]     G15 --- R18[รองเท้า<sub>2</sub>]         </pre>	<p><math>4 \times 3 \times 2 = 24</math></p>

ปัญหา	เขียนแผนภาพ	คำนวณ
	<pre> graph LR   A[สี่ 4] --&gt; B[ทางแกง 1]   A --&gt; C[ทางแกง 2]   A --&gt; D[ทางแกง 3]   B --&gt; E[รองเท้า 1]   B --&gt; F[รองเท้า 2]   C --&gt; G[รองเท้า 1]   C --&gt; H[รองเท้า 2]   D --&gt; I[รองเท้า 1]   D --&gt; J[รองเท้า 2] </pre>	
<p>3. คนทำงานเลือกวิธีการไปโรงเรียน คุณแม่ต้องออกจากซอยมายังถนนใหญ่มีวิธีการเดินทางได้ 3 วิธี คือ ขี่จักรยาน รถรับจ้าง และเดิน เมื่อมาถึงถนนใหญ่มีวิธีการเดินทางไปถึงโรงเรียนได้ 4 วิธี คือ รถประจำทางธรรมดา รถประจำทางปรับอากาศ รถตู้ และรถแท็กซี่</p>	<p>จากซอย-ถนนใหญ่                      จากถนนใหญ่-โรงเรียน</p> <pre> graph LR   A[จักรยาน] --&gt; B1[รถประจำทางธรรมดา]   A --&gt; B2[รถประจำทางปรับอากาศ]   A --&gt; B3[รถตู้]   A --&gt; B4[รถแท็กซี่]   C[รถรับจ้าง] --&gt; D1[รถประจำทางธรรมดา]   C --&gt; D2[รถประจำทางปรับอากาศ]   C --&gt; D3[รถตู้]   C --&gt; D4[รถแท็กซี่]   E[เดิน] --&gt; F1[รถประจำทางธรรมดา]   E --&gt; F2[รถประจำทางปรับอากาศ]   E --&gt; F3[รถตู้]   E --&gt; F4[รถแท็กซี่] </pre>	<p><math>3 \times 4 = 12</math></p>

## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

จำนวน 30 ชั่วโมง

เรื่อง แฟกทอเรียล

จำนวน 2 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

### ผลการเรียนรู้

เข้าใจและใช้หลักการบวกและการคูณ การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดหมู่ในการแก้ปัญหา

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) สามารถหาค่าของแฟกทอเรียลได้ (K)
- 2) เขียนจำนวนต่าง ๆ ให้อยู่ในรูปแฟกทอเรียลได้ (P)
- 3) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

### สาระการเรียนรู้

หลักการบวกและการคูณ

### สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

แฟกทอเรียล

บทนิยาม ให้  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก กล่าวว่า แฟกทอเรียล  $n$  คือ การคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง  $n$  เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $n!$

### สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร	1. มีวินัย
2. ความสามารถในการคิด	2. ใฝ่เรียนรู้
1) ทักษะการระบุ	3. มุ่งมั่นในการทำงาน
2) ทักษะการคิดคล่อง	
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	

## กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : อุปนัย (Inductive Method)

### ชั่วโมงที่ 1

#### ขั้นนำ

##### ขั้นเตรียม

1. ครูยกตัวอย่างอักษรภาษาอังกฤษสามตัวคือ A, B, C ให้นักเรียนช่วยกันจัดเรียงในแนวตรงจะได้กี่วิธี  
อะไรบ้าง

(แนวคำตอบ: ได้ 6 วิธี คือ ABC BAC CAB ACB BCA CBA)

2. ครูถามนักเรียนว่าถ้าใช้กฎการคูณในการหาจำนวนวิธีทั้งหมดได้หรือไม่ อย่างไร

(แนวคำตอบ: ได้ ดังนี้

ขั้นที่ 1 เลือกอักษรตัวที่ 1 จะเลือกได้ 3 วิธี

ขั้นที่ 2 เลือกอักษรตัวที่ 2 จะเลือกได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 3 เลือกอักษรตัวที่ 3 จะเลือกได้ 1 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ  $3 \times 2 \times 1 = 6$  วิธี)

#### ขั้นสอน

##### ขั้นสอนหรือแสดง

1. ครูยกตัวอย่างโจทย์ให้นักเรียนช่วยกันเรียงสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกันนำมาเรียงเป็นเส้นตรงทั้งหมด  
โดยใช้หลักการคูณ โดยให้นักเรียนทำใบงานที่ 2.2.1 แฟกทอเรียล

2. ครูให้นักเรียนร่วมกันสรุปหลักการจัดเรียงสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด  
จะได้  $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$  วิธี

3. ครูอธิบายให้นักเรียนเห็นว่า วิธีการจัดเรียงจำนวนในแต่ละข้อ ใช้หลักการคูณในการหาคำตอบ  
และจำนวนวิธีการจัดเรียงจำนวนจะเป็นผลคูณของจำนวนเต็มบวกที่เรียงติดกันและลดลงทีละ 1 ไปจนถึง 1  
เพื่อความสะดวกในการเขียนการคูณในลักษณะดังกล่าว จะแทนการคูณในลักษณะนี้ด้วยสัญลักษณ์ ! อ่านว่า  
แฟกทอเรียล ดังนั้น  $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$  จะเขียนแทนด้วย  $n!$  อ่านว่า เอ็นแฟกทอเรียล

4. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปบทเรียน จนได้บทนิยามของแฟกทอเรียล คือ ให้  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก  
กล่าวว่า แฟกทอเรียล  $n$  คือ การคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง  $n$  เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $n!$

5. ครูถามนักเรียนว่าเราสามารถเขียน  $10!$  ให้อยู่ในรูป  $10 \times 9!$  ได้หรือไม่

(แนวคำตอบ: ได้ เพราะ  $10 \times 9! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ )

6. ครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 12 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2  
หน่วยการ เรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้นเป็นการดำเนินการของรูปแฟกทอเรียล

7. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้นจากนั้นครูสุ่มเรียกนักเรียนให้บอกคำตอบ

## ชั่วโมงที่ 2

### ชั้นสอนหรือแสดง

8. ครูให้นักเรียนเขียนจำนวนในรูปการคูณโดยลงทีละ 1 ให้อยู่ในรูปแฟกทอเรียล เช่น

$$1) 15 \times 14 \times 13 = \frac{15!}{12!}$$

$$2) (n+1)(n)(n-1) = \frac{(n+1)!}{(n-2)!}$$

9. ครูให้นักเรียนพิจารณาค่าของ  $0!$  ว่ามีค่าเท่าใดแล้วครูแสดงการหาค่า  $0!$  ให้นักเรียนดูดังนี้

$$\text{จาก } n! = n(n-1)!$$

$$\text{ถ้ากำหนดให้ } n = 1 \text{ จะได้ } 1! = 1(1-1)!$$

$$1! = 1(0)!$$

$$\text{ดังนั้น } 0! = 1 \text{ นั่นเอง}$$

10. ครูให้นักเรียนนำความรู้เรื่องแฟกทอเรียลมาใช้ในการแก้สมการหาค่าตัวแปรที่อยู่ในรูปแฟกทอเรียล

ดังนี้

1) จงหาค่า  $n$  เมื่อ

$$1.1) n! = 24$$

$$\text{แนวคำตอบ } 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= 4!$$

$$\text{ดังนั้น } n = 4$$

$$1.2) \frac{n!}{(n-2)!} = 132$$

$$\text{แนวคำตอบ } \frac{n!}{(n-2)!} = 132$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 132$$

$$n(n-1) = 132$$

$$n(n-1) = 12 \times 11$$

$$\text{ดังนั้น } n = 12$$

$$1.3) 720n! = (n-6)!10!$$

แนวคำตอบ

$$720n! = (n-6)!10!$$

$$\frac{n!}{(n-6)!} = \frac{10!}{720}$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) = \frac{10!}{6!}$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) = 10 \times 9 \times 8 \times 7$$

จะต้องเขียนผลคูณใหม่ให้ได้ 6 จำนวน

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) = 5 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4 \times 2 \times 7$$

$$= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$$

ดังนั้น  $n = 7$

11. ให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้นเพื่อตรวจสอบความเข้าใจ

12. ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 2.2ก ข้อ 1-3 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ขั้นสรุป

1. ครูให้นักเรียนสรุปวิธีการหาจำนวนวิธีในการเรียงของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมดว่าจะจัดเรียงได้กี่แบบ

## การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่าง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) แพททอเรียล	- ตรวจสอบใบงานที่ 2.2.1 - ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ 2.2	- ใบงานที่ 2.2.1 - แบบฝึกทักษะ 2.2	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) นำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน	- แบบประเมินการ นำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงาน กลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึง ประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่น ในการทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

## สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

### สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น
- 3) ใบงานที่ 2.1.1 เรื่อง แพททอเรียล

### แหล่งการเรียนรู้

-



## ใบงาน 2.2.1

### เรื่อง แพททอเรียล

---

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนเขียนจำนวนวิธีการเรียงสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกันเป็นเส้นตรงทั้งหมด โดยใช้หลักการคูณ

- มีของ 4 ชิ้นที่แตกต่างกันจะเรียงได้ทั้งหมด  
เท่ากับ ..... วิธี
- มีของ 5 ชิ้นที่แตกต่างกันจะเรียงได้ทั้งหมด  
เท่ากับ ..... วิธี
- มีของ 10 ชิ้นที่แตกต่างกันจะเรียงได้ทั้งหมด  
เท่ากับ ..... วิธี
- มีของ 20 ชิ้นที่แตกต่างกันจะเรียงได้ทั้งหมด  
เท่ากับ ..... วิธี

เรื่อง แฟกทอเรียล

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนเขียนจำนวนวิธีการเรียงสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกันเป็นเส้นตรงทั้งหมด โดยใช้หลักการคูณ

1. มีของ 4 ชิ้นที่แตกต่างกันจะเรียงได้ทั้งหมด

เท่ากับ  $4 \times 3 \times 2 \times 1$  วิธี.....

2. มีของ 5 ชิ้นที่แตกต่างกันจะเรียงได้ทั้งหมด

เท่ากับ  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  วิธี.....

3. มีของ 10 ชิ้นที่แตกต่างกันจะเรียงได้ทั้งหมด

เท่ากับ  $10 \times 9 \times 8 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$  วิธี.....

4. มีของ 20 ชิ้นที่แตกต่างกันจะเรียงได้ทั้งหมด

เท่ากับ  $20 \times 19 \times 18 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$  วิธี.....

### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

จำนวน 30 ชั่วโมง

เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันในแนวตรง

จำนวน 4 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

#### ผลการเรียนรู้

เข้าใจและใช้หลักการบวกและการคูณ การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดหมู่ในการแก้ปัญหา

#### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันในแนวตรงได้ (K)
- 2) เขียนแสดงขั้นตอนการทำงานของ การเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันในแนวตรงได้ (P)
- 3) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

#### สาระการเรียนรู้

การเรียงสับเปลี่ยน

#### สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมดในแนวตรง เท่ากับ  $n!$  วิธี

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมดในแนวตรง

โดยจัดเรียงคร่าวละ  $r$  สิ่ง ( $0 \leq r \leq n$ ) เท่ากับ  $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$  วิธี

#### สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร	1. มีวินัย
2. ความสามารถในการคิด	2. ใฝ่เรียนรู้
1) ทักษะการให้เหตุผล	3. มุ่งมั่นในการทำงาน
2) ทักษะการคิดคล่อง	
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	

## กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : อุปนัย (Inductive Method)

### ชั่วโมงที่ 1

#### ขั้นนำ

##### ขั้นเตรียม

1. ครูทบทวนเรื่อง แฟกทอเรียลและเรื่องการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของทั้งหมด  $n$  สิ่งเป็นแนวตรง จะสามารถทำได้กี่วิธี

(แนวคำตอบ:  $n!$  วิธี ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น  $n(n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ )

2. ครูแจกใบงาน 2.3.1 เรื่อง การเรียงสับเปลี่ยน ให้กับนักเรียนจากนั้นให้เวลานักเรียนในการทำใบงานประมาณ 10 นาที

#### ขั้นสอน

##### ขั้นสอนหรือแสดง

1. จากการทำใบงาน ครูกล่าวสรุปว่า การนำสิ่งของที่แตกต่างกันมาจัดเรียงเป็นเป็นเส้นตรง เราจะเรียกว่า การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น (linear permutation)

2. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปการหาจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นที่นักเรียนทำจากใบงานจะมีทั้งหมดได้กี่วิธี มีอะไรบ้าง

(แนวคำตอบ: 2 วิธี คือ ให้การคูณและการเขียนแจกแจง)

### ชั่วโมงที่ 2

##### ขั้นสอนหรือแสดง

3. ครูบอกให้นักเรียนรู้จักสัญลักษณ์ที่ใช้แทนการหาจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นตรงของสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยจัดเรียงครั้งละ  $r$  สิ่ง จะเขียนแทนด้วย  $P(n,r)$  หรือ  $nPr$  หรือ  $P_{n,r}$  โดย  $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

4. ครูยกตัวอย่างในการหาค่า  $P_{n,r}$  เช่น

จงหาค่าของ 1)  $P_{12,5}$

2)  $P_{4,4}$

3)  $P_{4,2}$

(แนวคำตอบ: 1)  $P_{12,5}$

$$\begin{aligned}P_{12,5} &= \frac{12!}{(12-5)!} \\ &= \frac{12!}{7!} \\ &= 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \\ &= 95,040\end{aligned}$$

2)  $P_{4,4}$

$$\begin{aligned}P_{4,4} &= \frac{4!}{(4-4)!} \\ &= \frac{4!}{0!} \\ &= \frac{4!}{1!} \\ &= 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 24\end{aligned}$$

3)  $P_{4,2}$

$$\begin{aligned}P_{4,2} &= \frac{4!}{(4-2)!} \\ &= \frac{4!}{2!} \\ &= 4 \times 3 \\ &= 12\end{aligned}$$

5. ครุยกตัวอย่างในการหาค่า  $n$  จากการใช้สูตร  $P_{n,r}$  เช่น

จงหาค่า  $n$  เมื่อ 1)  $P_{n,6} = 30P_{n,4}$       2)  $P_{n+1,3} - 10P_{n-1,2} = 0$

(แนวคำตอบ: 1)  $P_{n,6} = 30P_{n,4}$

วิธีทำ  $P_{n,6} = 30P_{n,4}$

$$\frac{n!}{(n-6)!} = 30 \frac{n!}{(n-4)!}$$

$$\frac{(n-4)!}{(n-6)!} = 30$$

$$(n-4)(n-5) = 6 \times 5$$

$$\text{จะได้ว่า } n-4 = 6 \quad \left| \quad n-5 = 5\right.$$

$$\text{นั่นคือ } n = 10 \quad \left| \quad n = 10\right.$$

$$\text{ดังนั้น } n = 10$$

$$2) P_{n+1,3} - 10P_{n-1,2} = 0$$

วิธีทำ  $P_{n+1,3} - 10P_{n-1,2} = 0$

$$\frac{(n+1)!}{(n+2-3)!} = 10 \frac{(n-1)!}{(n-2-3)!}$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-2)!} = 10 \frac{(n-1)!}{(n-3)!}$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 10 \frac{(n-2)!}{(n-3)!}$$

$$(n+1)(n) = 10(n-2)$$

$$n^2 + n = 10n - 20$$

$$n^2 - 9n + 20 = 0$$

$$(n-4)(n-5) = 0$$

จะได้ว่า  $n-4=0$        $n-5=0$

นั่นคือ  $n=4$        $n=5$

ดังนั้น  $n=4$  หรือ  $5$ )

6. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้นเป็นการทดสอบย่อย โดยครูแจกกระดาษคำตอบให้นักเรียนเขียนคำตอบให้เวลาในการทำ 10 นาที

7. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 2.2ข ข้อ 1, 2 และ 3 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้นจากนั้นนักเรียนและครูร่วมกันเฉลยคำตอบ

**ชั่วโมงที่ 3**

**ขั้นสอนหรือแสดง**

8. ครูถามนักเรียนว่าจากการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นตรงของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยจัดเรียงครั้งละ r สิ่ง โดยใช้สูตร  $P_{n,r}$  สามารถนำไปใช้ประโยชน์ในชีวิตประจำวันของเรา เช่น การเรียงสิ่งใดได้บ้าง โดยครูให้นักเรียนยกตัวอย่าง 2 – 3 คำตอบ

**(แนวคำตอบ:**

1) มีหนังสือ 5 เล่มที่แตกต่างกัน ต้องการนำมาจัดเรียงบนชั้นวางหนังสือเป็นแนวตรง ครั้ง ละ 3 เล่ม จะสามารถจัดเรียงหนังสือได้  $P_{5,3} = 60$  วิธี

2) มีนักเรียน 10 คน สมัยครคัดเลือกเป็นประธานนักเรียนและรองประธานอย่างละ 1 ตำแหน่ง จะมี วิธีการคัดเลือกได้ทั้งหมด  $P_{10,2} = 90$  วิธี)

9. ครุยกตัวอย่างการนำสูตร  $P_{n,r}$  ไปใช้แก้โจทย์ปัญหาดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 นำตัวอักษรจากคำว่า “MONDAY” มาจัดเรียงเป็นคำใหม่โดยไม่คำนึงถึงความหมาย ดังนี้

- 1) เลือกตัวอักษรมาครั้งละ 4 ตัว
- 2) เลือกตัวอักษรมาครั้งละ 4 ตัว โดยให้ A อยู่หน้าสุดเสมอ
- 3) เลือกตัวอักษรมาครั้งละ 4 ตัว โดยให้ A และ M อยู่ติดกันเสมอ

วิธีทำ 1) เลือกตัวอักษรมาครั้งละ 4 ตัว

ตำแหน่งที่ 1 เลือกตัวอักษรมาจัดเรียงได้ 6 วิธี

ตำแหน่งที่ 2 เลือกตัวอักษรมาจัดเรียงได้ 5 วิธี

ตำแหน่งที่ 3 เลือกตัวอักษรมาจัดเรียงได้ 4 วิธี

ตำแหน่งที่ 4 เลือกตัวอักษรมาจัดเรียงได้ 3 วิธี

ดังนั้น จะสามารถจัดเรียงตัวอักษรได้ทั้งหมด  $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$  วิธี

$$\begin{aligned}\text{หรือใช้สูตร } P_{6,4} &= \frac{6!}{(6-4)!} \\ &= \frac{6!}{2!} \\ &= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \\ &= 360 \text{ วิธี}\end{aligned}$$

2) เลือกตัวอักษรมาครั้งละ 4 ตัว โดยให้ A อยู่หน้าสุดเสมอ

ตำแหน่งที่ 1 เลือกตัวอักษรมาจัดเรียงได้ 1 วิธี (อักษร A)

ตำแหน่งที่ 2 เลือกตัวอักษรมาจัดเรียงได้ 5 วิธี

ตำแหน่งที่ 3 เลือกตัวอักษรมาจัดเรียงได้ 4 วิธี

ตำแหน่งที่ 4 เลือกตัวอักษรมาจัดเรียงได้ 3 วิธี

ดังนั้น จะสามารถจัดเรียงตัวอักษรได้ทั้งหมด  $1 \times 5 \times 4 \times 3 = 60$  วิธี

$$\begin{aligned}\text{หรือใช้สูตร } P_{5,3} &= \frac{5!}{(5-3)!} \\ &= \frac{5!}{2!} \\ &= 5 \times 4 \times 3 \\ &= 60 \text{ วิธี}\end{aligned}$$

3) เลือกตัวอักษรมาครั้งละ 4 ตัว โดยให้ A และ M อยู่ติดกันเสมอ

เนื่องจาก A และ M อยู่ติดกันเสมอจะสามารถสลับที่กันได้เท่ากับ  $2! = 2$  วิธี

ทำให้มีตำแหน่งที่จะจัดเรียงเหลืออยู่ 3 ตำแหน่ง

ดังนั้น จึงจัด A และ M อยู่ติดกันได้ 3 วิธี

การจัด A และ M จึงคิดเป็น  $2 \times 3 = 6$  วิธี

และยังเหลือตำแหน่งให้เลือกอีก 2 ตำแหน่งจากตัวอักษร 4 ตัวที่เหลืออยู่ จึงได้

$$\begin{aligned}P_{4,2} &= \frac{4!}{(4-2)!} \\ &= \frac{4!}{2!} \\ &= 4 \times 3 \\ &= 12 \text{ วิธี}\end{aligned}$$

ดังนั้น จะจัดอักษร 4 ตัวโดยที่อักษร A และ M อยู่ติดกันเสมอได้  $6 \times 12 = 72$  วิธี

10. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 17 – 19 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น

11. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น เพื่อตรวจสอบความเข้าใจ

#### ชั่วโมงที่ 4

##### ขั้นสอนหรือแสดง

12. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 20 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น พิจารณาการสร้างจำนวนจากเลขโดด

13. ครูยกตัวอย่างการสร้างจำนวนที่มีค่าไม่เกินสามหลักและมีค่าน้อยกว่า 500 จากตัวเลขโดด 0, 2, 5, 8 โดยแต่ละหลักสามารถซ้ำกันได้ จะสร้างได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ กรณีที่ 1 สร้างจำนวนที่มีหนึ่งหลัก เลือกตัวเลขโดด 1 ตัวจากเลขโดด 4 ตัว

จะได้  $P_{4,1} = 4$  วิธี

กรณีที่ 2 สร้างจำนวนที่มีสองหลัก

ขั้นตอนที่ 1 เลือกตัวเลขหลักสิบ เลือกตัวเลขโดด 1 ตัวจากเลขโดด 3 ตัว (ไม่ใช่เลข 0)

จะได้  $P_{3,1} = 3$  วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกตัวเลขหลักหน่วย เลือกตัวเลขโดด 1 ตัวจากเลขโดด 4 ตัว

จะได้  $P_{4,1} = 4$  วิธี

ดังนั้น จะสร้างจำนวนที่มีสองหลักได้เท่ากับ  $P_{3,1} \times P_{4,1} = 3 \times 4 = 12$  วิธี



กรณีที่ 3 สร้างจำนวนที่มีสามหลัก

ขั้นตอนที่ 1 เลือกตัวเลขหลักร้อย เลือกตัวเลขโดดได้ 1 ตัว นั่นคือ เลข 2  
(เพราะค่าต้องน้อยกว่า 500)

$$\text{จะได้ } P_{3,1} = 3 \text{ วิธี}$$

ขั้นตอนที่ 2 เลือกตัวเลขหลักสิบ เลือกตัวเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 4 ตัว

$$\text{จะได้ } P_{4,1} = 4 \text{ วิธี}$$

ขั้นตอนที่ 3 เลือกตัวเลขหลักหน่วย เลือกตัวเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 4 ตัว

$$\text{จะได้ } P_{4,1} = 4 \text{ วิธี}$$

ดังนั้น จะสร้างจำนวนที่มีสามหลัก ได้เท่ากับ  $1 \times P_{4,1} \times P_{4,1} = 1 \times 4 \times 4 = 16$  วิธี

ดังนั้น สร้างจำนวนที่มีค่าไม่เกินสามหลักและมีค่าน้อยกว่า 500 ได้เท่ากับ  $4 + 12 + 16 = 32$  วิธี

14. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น

15. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 2.2x ในหนังสือเรียนหน้า 95 ข้อ 4 - 8 จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกัน

เฉลยคำตอบ

**ขั้นสรุป**

1. ครูทดสอบความรู้ของนักเรียนโดยการถามตอบ ซึ่งมีแนวคำถามดังนี้

- การเรียงสับเปลี่ยน มีรูปแบบแล้วมีอะไรบ้าง

(แนวตอบ: มี 2 รูปแบบ คือ การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น และ การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม)

## การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่าง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) การเรียงสับเปลี่ยนเชิง เส้นตรง	- ตรวจสอบใบงานที่ 2.3.1 - ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ 2.3	- ใบงานที่ 2.3.1 - แบบฝึกทักษะ 2.3	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) นำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน	- แบบประเมินการ นำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงาน กลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่น ในการทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

## สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

### สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น
- 3) ใบงานที่ 2.3.1 เรื่อง การเรียงสับเปลี่ยน

### แหล่งการเรียนรู้

-

## ใบงานที่ 2.3.1

### เรื่อง การเรียงสับเปลี่ยน

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. จงหาวิธีการจัดเรียงสิ่งของที่กำหนดให้แต่ละข้อต่อไปนี้และแสดงในรูปการคูณ

ตัวอักษรที่กำหนดให้	จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นตรง
1) B, E, D	1.1 ใช้ตัวอักษรทั้งหมดทุกตัว เขียนจำนวนวิธีในรูปการคูณได้คือ ..... เขียนแจกแจงแต่ละวิธีได้แก่ .....  1.2 ใช้ตัวอักษรทีละ 2 ตัว เขียนจำนวนวิธีในรูปการคูณได้คือ ..... เขียนแจกแจงแต่ละวิธีได้แก่ .....
2) C, R, A, B	2.1 ใช้ตัวอักษรทั้งหมดทุกตัว เขียนจำนวนวิธีในรูปการคูณได้คือ ..... เขียนแจกแจงแต่ละวิธีได้แก่ ..... .....  2.2 ใช้ตัวอักษรทีละ 2 ตัว เขียนจำนวนวิธีในรูปการคูณได้คือ ..... เขียนแจกแจงแต่ละวิธีได้แก่ ..... .....
3) G, R, A, P, E	3.1 ใช้ตัวอักษรทั้งหมดทุกตัว เขียนจำนวนวิธีในรูปการคูณได้คือ .....  3.2 ใช้ตัวอักษรทีละ 3 ตัว เขียนจำนวนวิธีในรูปการคูณได้คือ .....

2. ข้อสรุปจะได้ว่า

2.1 ถ้ามีสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกัน สามารถนำมาจัดเรียงสับเปลี่ยนเป็นเส้นตรง จะได้ ..... วิธี แต่ละขั้นตอนทำต่อเนื่อง โดยแต่ละขั้นตอนจะมีวิธี ดังนี้

- ตำแหน่งที่ 1 .....
- ตำแหน่งที่ 2 .....
- ตำแหน่งที่ 3 .....
- ⋮
- ตำแหน่งที่  $n - 1$  .....
- ตำแหน่งที่  $n$  .....

แต่ถ้ามีสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกัน นำมาจัดเรียงครั้งละ  $r$  สิ่ง ซึ่งมีขั้นตอนการจัด  $r$  ขั้นตอน แต่ละขั้นตอนทำต่อเนื่อง โดยแต่ละขั้นตอนจะมีวิธี ดังนี้

- ตำแหน่งที่ 1 .....
- ตำแหน่งที่ 2 .....
- ตำแหน่งที่ 3 .....
- ⋮
- ตำแหน่งที่  $r - 1$  .....
- ตำแหน่งที่  $r$  .....

ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ  $n$  สิ่ง ที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยจัดเรียงครั้งละ  $r$  ตำแหน่ง

- เท่ากับ .....
- เท่ากับ .....
- เท่ากับ .....

## ใบงานที่ 2.3.1

### เรื่อง การเรียงสับเปลี่ยน

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. จงหาวิธีการจัดเรียงสิ่งของที่กำหนดให้แต่ละข้อต่อไปนี้และแสดงในรูปแฟกทอเรียล

ตัวอักษรที่กำหนดให้	จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นตรง
1) B, E, D	<p>1.1 ใช้ตัวอักษรทั้งหมดทุกตัว เขียนจำนวนวิธีในการคูณได้คือ <math>3 \times 2 \times 1 = 3!</math>..... เขียนแจกแจงแต่ละวิธีได้แก่ <u>BED, BDE, EBD, EDB, DBE, DEB</u>.....</p> <p>1.2 ใช้ตัวอักษรทีละ 2 ตัว เขียนจำนวนวิธีในการคูณได้คือ <math>3 \times 2</math>..... เขียนแจกแจงแต่ละวิธีได้แก่ <u>BE, BD, EB, ED, DB, DE</u>.....</p>
2) C, R, A, B	<p>2.1 ใช้ตัวอักษรทั้งหมดทุกตัว เขียนจำนวนวิธีในการคูณได้คือ <math>4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!</math>..... เขียนแจกแจงแต่ละวิธีได้แก่ <u>CRAB, CRBA, CARB, CABR, CBRA, CBAR, RCAB, RCBA, RACB, RABC, RBAC, RBCA, ARCB, ARBC, ACRB, ACBR, ABRC, ABCR, BRCA, BRAC, BARC, BACR, BCAR, BCRA</u>.....</p> <p>2.2 ใช้ตัวอักษรทีละ 2 ตัว เขียนจำนวนวิธีในการคูณได้คือ <math>4 \times 3</math>..... เขียนแจกแจงแต่ละวิธีได้แก่ <u>CR, CB, CA, RC, RB, RA, AR, AB, AC, BR, BA, BC</u>.....</p>
3) G, R, A, P, E	<p>3.1 ใช้ตัวอักษรทั้งหมดทุกตัว เขียนจำนวนวิธีในการคูณได้คือ <math>5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!</math>.....</p> <p>3.2 ใช้ตัวอักษรทีละ 3 ตัว เขียนจำนวนวิธีในการคูณได้คือ <math>5 \times 4 \times 3</math>.....</p>

## 2. ข้อสรุปจะได้ว่า

2.1 ถ้ามีสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกัน สามารถนำมาจัดเรียงสับเปลี่ยนเป็นเส้นตรง จะได้  $n!$  วิธี แต่ละขั้นตอนทำต่อเนื่อง โดยแต่ละขั้นตอนจะมีวิธี ดังนี้

ตำแหน่งที่ 1 มีจำนวนวิธี  $n$  วิธี จะเหลือสิ่งของที่จะจัดในตำแหน่งที่ 2 ได้  $n - 1$  วิธี

ตำแหน่งที่ 2 มีจำนวนวิธี  $n - 1$  วิธี จะเหลือสิ่งของที่จะจัดในตำแหน่งที่ 3 ได้  $n - 2$  วิธี

ตำแหน่งที่ 3 มีจำนวนวิธี  $n - 2$  วิธี จะเหลือสิ่งของที่จะจัดในตำแหน่งที่ 4 ได้  $n - 3$  วิธี

⋮

ตำแหน่งที่  $n - 1$  มีจำนวนวิธี  $n - (n - 2)$  วิธี ในทำนองเดียวกัน

ตำแหน่งที่  $n$  มีจำนวนวิธี  $n - (n - 1)$  วิธี

แต่ถ้ามีสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกัน นำมาจัดเรียงครั้งละ  $r$  สิ่ง ซึ่งมีขั้นตอนการจัด  $r$  ขั้นตอน แต่ละขั้นตอนทำต่อเนื่อง โดยแต่ละขั้นตอนจะมีวิธี ดังนี้

ตำแหน่งที่ 1 มีจำนวนวิธี  $n$  วิธี จะเหลือสิ่งของที่จะจัดในตำแหน่งที่ 2 ได้  $n - 1$  วิธี

ตำแหน่งที่ 2 มีจำนวนวิธี  $n - 1$  วิธี จะเหลือสิ่งของที่จะจัดในตำแหน่งที่ 3 ได้  $n - 2$  วิธี

ตำแหน่งที่ 3 มีจำนวนวิธี  $n - 2$  วิธี จะเหลือสิ่งของที่จะจัดในตำแหน่งที่ 4 ได้  $n - 3$  วิธี

⋮

ตำแหน่งที่  $r - 1$  มีจำนวนวิธี  $n - (r - 2)$  วิธี ในทำนองเดียวกัน

ตำแหน่งที่  $r$  มีจำนวนวิธี  $n - (r - 1)$  วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ  $n$  สิ่ง ที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยจัดเรียงครั้งละ  $r$  ตำแหน่ง

เท่ากับ  $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times [n - (r - 2)] \times [n - (r - 1)]$

เท่ากับ  $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n - r + 2) \times (n - r + 1) \times \frac{(n+r)!}{(n-r)!}$

เท่ากับ  $\frac{n!}{(n-r)!}$

## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

จำนวน 30 ชั่วโมง

เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลม

จำนวน 3 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

### ผลการเรียนรู้

เข้าใจและใช้หลักการบวกและการคูณ การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดหมู่ในการแก้ปัญหา

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมได้ (K)
- 2) เขียนแสดงขั้นตอนของการเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมได้ (P)
- 3) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

### สาระการเรียนรู้

การเรียงสับเปลี่ยน

### สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

มีสิ่งของ  $n$  ชิ้น ที่แตกต่างกัน จัดเรียงเป็นวงกลม (แบบ 2 มิติ) ได้  $(n - 1)!$  วิธี

มีสิ่งของ  $n$  ชิ้น ที่แตกต่างกัน จัดเรียงเป็นวงกลม (แบบ 3 มิติ) ได้  $\frac{(n - 1)!}{2}$  วิธี

### สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร	1. มีวินัย
2. ความสามารถในการคิด	2. ใฝ่เรียนรู้
1) ทักษะการระบุ	3. มุ่งมั่นในการทำงาน
2) ทักษะการคิดคล่อง	
3) ทักษะกระบวนการคิด	
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	

## กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : แบบ Concept Based Teaching

### ชั่วโมงที่ 1

#### ขั้นนำ

ขั้นการใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

1. ครูทบทวนเรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นตรงของสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด จะทำได้กี่วิธี

(แนวคำตอบ:  $n!$  วิธี)

2. ครูทบทวนเรื่อง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นตรงของสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยจัดเรียงครั้งละ  $r$  สิ่ง จะทำได้กี่วิธี

(แนวคำตอบ:  $\frac{n!}{(n-r)!}$  วิธี)

3. ครูย้ำกับนักเรียนว่าการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นตรงมีสัญลักษณ์แทนด้วย  $P$

#### ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

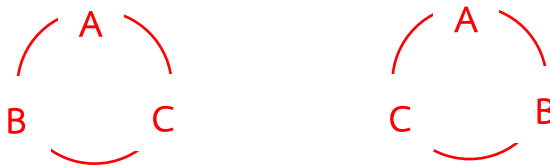
1. ครูยกตัวอย่างว่ามีตัวอักษร 3 ตัว ได้แก่ A, B, C แล้วดำเนินการต่อไปนี้

- ครูให้นักเรียนพิจารณาจำนวนวิธีที่จะนำอักษรทั้งสามตัวมาจัดเรียงเป็นเชิงเส้นตรงได้กี่วิธี

(แนวคำตอบ:  $3! = 6$  วิธี)

- ครูให้นักเรียนช่วยกันจัดเรียงอักษรทั้งสามตัวให้เป็นวงกลม โดยให้วาดเป็นแผนภาพประกอบ

(แนวคำตอบ: วาดเป็นแผนภาพประกอบได้ ดังนี้

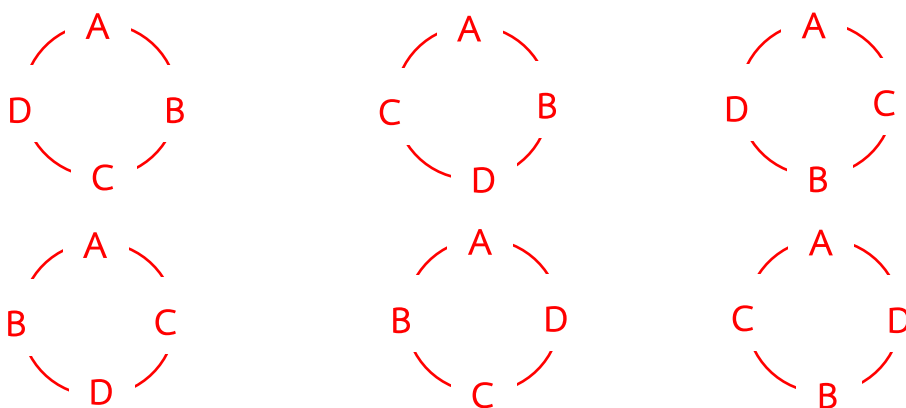


ดังนั้น จะจัดเรียงได้ทั้งหมด 2 วิธี)

2. ครูให้นักเรียนเพิ่มตัวอักษรอีก 1 ตัว เช่น นำตัวอักษร 4 ตัว ได้แก่ A, B, C, D มาจัดเรียงเป็นวงกลมจะสามารถทำได้ทั้งหมดกี่แบบ

(แนวคำตอบ: วาดเป็นแผนภาพประกอบได้ ดังนี้





ดังนั้น จะจัดเรียงได้ทั้งหมด 6 วิธี)

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

3. ครูให้นักเรียนทำใบงานที่ 2.4.1 เรื่อง การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม จากนั้นนักเรียนและครูร่วมกันเฉลยคำตอบในใบงาน

ชั่วโมงที่ 2

### ขั้นรู้ (Knowing)

4. ครูบอกให้นักเรียนร่วมกันสรุปวิธีการจัดเรียงสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกันเป็นเชิงวงกลมแบบ 2 มิติ จะได้  $(n - 1)!$  วิธี

5. ครูยกตัวอย่างโจทย์ปัญหาแล้วให้นักเรียนบอกคำตอบ ดังต่อไปนี้

- การจัดเรียงธงรอบอนุสาวรีย์ 20 ธง จะจัดได้กี่วิธี  
(แนวคำตอบ:  $19!$  วิธี)
- การจัดเรียงคน 6 คน นั่งโต๊ะกลม จะจัดได้กี่วิธี  
(แนวคำตอบ:  $5!$  วิธี)
- การจัดเรียงกระดาษต้นไม้รอบเสาธง 8 ต้น จะจัดได้กี่วิธี  
(แนวคำตอบ:  $7!$  วิธี)

6. ครูยกตัวอย่างถามนักเรียนต่อว่าถ้าจะจัดเรียงคน โดยมีผู้ชาย 6 คนและผู้หญิง 6 คน นั่งรอบโต๊ะกลม โดยมีเงื่อนไขต่างกัน ดังนี้

1) ให้นั่งสลับกันระหว่างชายและหญิง

- แนวคิด
- ขั้นตอนที่ 1 จัดผู้ชายนั่งโต๊ะก่อนได้  $5!$  วิธี
  - ขั้นตอนที่ 2 จัดผู้หญิงนั่งแทรกระหว่างผู้ชายได้  $6!$  วิธี
- ดังนั้น จะมีจำนวนวิธีการในการจัดเรียงเท่ากับ  $5!6!$  วิธี

2) ให้นั่งสลับกันระหว่างชายและหญิงทีละ 2 คน

**แนวคิด** กรณีที่ 1 ให้ผู้ชายนั่งประจำที่ด้านซ้าย 1 คน

ขั้นตอนที่ 1 จัดผู้ชายนั่งโต๊ะก่อนได้ 5! วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดผู้หญิงนั่งแทรกระหว่างผู้ชายได้ 6! วิธี

กรณีที่ 2 ให้ผู้ชายนั่งประจำที่ด้านขวา 1 คน

ขั้นตอนที่ 1 จัดผู้ชายนั่งโต๊ะก่อนได้ 5! วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดผู้หญิงนั่งแทรกระหว่างผู้ชายได้ 6! วิธี

ดังนั้น จะมีจำนวนวิธีการในการจัดเรียงเท่ากับ  $5!6! + 5!6! = 2(5!6!)$  วิธี

3) ให้นั่งสลับกันระหว่างชายและหญิงทีละ 3 คน

**แนวคิด** กรณีที่ 1 ให้ผู้ชายนั่งประจำที่ด้านซ้ายสุด 1 คน

ขั้นตอนที่ 1 จัดผู้ชายนั่งโต๊ะก่อนได้ 5! วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดผู้หญิงนั่งแทรกระหว่างผู้ชายได้ 6! วิธี

กรณีที่ 2 ให้ผู้ชายนั่งประจำที่ตรงกลาง 1 คน

ขั้นตอนที่ 1 จัดผู้ชายนั่งโต๊ะก่อนได้ 5! วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดผู้หญิงนั่งแทรกระหว่างผู้ชายได้ 6! วิธี

กรณีที่ 3 ให้ผู้ชายนั่งประจำที่ด้านขวาสุด 1 คน

ขั้นตอนที่ 1 จัดผู้ชายนั่งโต๊ะก่อนได้ 5! วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดผู้หญิงนั่งแทรกระหว่างผู้ชายได้ 6! วิธี

ดังนั้น จะมีจำนวนวิธีการในการจัดเรียงเท่ากับ  $5!6! + 5!6! + 5!6! = 3(5!6!)$  วิธี

7. ครูให้นักเรียนร่วมกันสรุปวิธีการจัดเรียงสิ่งของแบบวงกลม ได้ดังนี้

• มีสิ่งของแตกต่างกัน 2 ประเภท ประเภทละ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกัน นำมาเรียงเป็นเชิงวงกลมแบบ 2 มิติ โดยให้สองสิ่งสลับกัน

แบบ 1 : 1 จะได้จำนวนวิธีคือ  $(n - 1)n!$  วิธี

แบบ 2 : 2 จะได้จำนวนวิธีคือ  $2(n - 1)n!$  วิธี

แบบ 3 : 3 จะได้จำนวนวิธีคือ  $3(n - 1)n!$  วิธี

⋮ ⋮

แบบ  $n$  :  $n$  จะได้จำนวนวิธีคือ  $n(n - 1)n!$  วิธี

**ขั้นเข้าใจ (Understanding)**

8. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 2.2ง ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้นจากนั้นครูและนักเรียนร่วมกัน เฉลยคำตอบ

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นรู้ (Knowing)

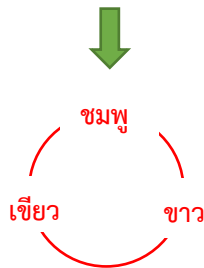
9. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 3-4 คน จากนั้นให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาการนำดอกไม้ 3 สีได้แก่ สีชมพู สีเขียวและสีขาว มาเรียงเป็นวงกลมวางบนโต๊ะ จะสามารถทำได้กี่วิธี

(แนวคำตอบ:  $(3 - 1)! = 2$  วิธีคือ



10. จากการจัดเรียงข้างต้น ครูให้นักเรียนนำดอกไม้ทั้งสามสีนั้นมาร้อยให้เป็นพวงมาลัย จะสามารถทำได้แตกต่างกันกี่แบบ

(แนวคำตอบ: 1 วิธี เพราะพวงมาลัยนั้นเป็นแบบ 3 มิติ สามารถมองได้ 2 ด้าน ดังนั้น ถ้ามองจากด้านบนจะได้



แต่ถ้ามองจากด้านล่างจะได้



นั่นคือ การมองได้ 2 ด้านนั้น ทำให้การเรียงแบบวงกลมเดิมมีได้ 2 แบบ ในทางปฏิบัติจะเหลือเพียง 1 แบบเท่านั้น)

11. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปการจัดเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม 3 มิติ ที่มีของ n สิ่งที่แตกต่างกัน จะได้จำนวนวิธี เท่ากับจำนวนวิธีที่จัดเรียงเป็นวงกลมแบบ 2 มิติ แล้วหารด้วย 2 ซึ่งเท่ากับ

$$\frac{(n - 1)!}{2} \text{ วิธี}$$

12. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 24 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

13. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น เพื่อตรวจสอบความเข้าใจ

### ขั้นลงมือทำ (Doing)

14. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 3 คน แล้วร่วมกันทำแบบฝึกทักษะ 2.2ง ข้อ 6 ระดับท้าทาย ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น และครูสุ่มเลือกนักเรียน 1 กลุ่มออกมานำเสนอแนวคิดในการหาคำตอบ

15. ครูให้นักเรียนทำแนวข้อสอบ PAT 1 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น จากนั้นครูให้นักเรียนช่วยกันเฉลยคำตอบโดยครูเขียนบนกระดาน

### ขั้นสรุป

1. ครูให้นักเรียนช่วยกันขั้นตอนในการหาจำนวนวิธีของการเรียงสิ่งของเป็นวงกลมทั้งแบบ 2 มิติ และแบบ 3 มิติ
2. ครูให้นักเรียนเขียนสรุปความรู้รวบยอดเรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลม ลงในสมุด

## การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่าง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้			
1) วิธีเรียงสับเปลี่ยนของ สิ่งของที่แตกต่างกัน แบบวงกลม	- ตรวจสอบงานที่ 2.4.1 - ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ 2.4	- ใบงานที่ 2.4.1 - แบบฝึกทักษะ 2.4	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) นำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน	- แบบประเมินการ นำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงาน กลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่น ในการทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

## สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

### สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น
- 3) ใบงานที่ 2.4.1 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลม

### แหล่งการเรียนรู้

-

ใบงานที่ 2.4.1

เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลม

คำชี้แจง : ให้นักเรียนตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

จำนวนตัวอักษร	จำนวนวิธีจัดเรียงเชิงเส้นตรง	เขียนแผนภาพ	จำนวนวิธีจัดเรียงเชิงวงกลม	จำนวนวิธีจัดเรียงเชิงวงกลม เขียนในรูปแฟกทอเรียล
A B C				
A B C D				
A B C D E				
n ตัว				

เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลม

คำชี้แจง : ให้นักเรียนตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

จำนวนตัวอักษร	จำนวนวิธีจัดเรียงเชิงเส้นตรง	เขียนแผนภาพการจัดเรียงเชิงวงกลม	จำนวนวิธีจัดเรียงเชิงวงกลม	จำนวนวิธีจัดเรียงเชิงวงกลม เขียนในรูปแฟกทอเรียล
A B C	3!		2	2!
A B C D	4!		6	3!
A B C D E	5!		24	4!
n ตัว	n!			(n-1)!

## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

จำนวน 30 ชั่วโมง

เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันและการแบ่งกลุ่ม

จำนวน 5 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

### ผลการเรียนรู้

เข้าใจและใช้หลักการบวกและการคูณ การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดหมู่ในการแก้ปัญหา

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันและการแบ่งกลุ่มได้ (K)
- 2) เขียนแสดงขั้นตอนของวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันและการแบ่งกลุ่มได้ (P)
- 3) รับผิดชอบหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

### สาระการเรียนรู้

การเรียงสับเปลี่ยน

### สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

ถ้ามีสิ่งของ  $k$  กลุ่ม ซึ่งในกลุ่มที่ 1 มีของ  $n_1$  สิ่งที่เหมือนกัน

ในกลุ่มที่ 2 มีของ  $n_2$  สิ่งที่เหมือนกัน

⋮

ในกลุ่มที่  $k$  มีของ  $n_k$  สิ่งที่เหมือนกัน

โดยที่  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$


จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนกลุ่มของสิ่งของ  $n$  สิ่ง เท่ากับ  $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$  วิธี

### สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร	1. มีวินัย
2. ความสามารถในการคิด	2. ใฝ่เรียนรู้
1) ทักษะการระบุ	3. มุ่งมั่นในการทำงาน
2) ทักษะการคิดคล่อง	
3) ทักษะกระบวนการคิด	
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	



## กิจกรรมการเรียนรู้

 แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : อุปนัย (Induction)

### ชั่วโมงที่ 1

#### ขั้นนำ

##### ขั้นเตรียม

1. ครูให้สถานการณ์จัดเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ  $n$  สิ่งเป็นเส้นตรง ถ้าสิ่งของทั้งหมด  $n$  สิ่งแตกต่างกัน กับสิ่งของ  $n$  สิ่งที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด จากนั้นให้นักเรียนคิดว่าจะมีจำนวนวิธีเรียงได้ทั้งหมดกี่วิธี

#### ขั้นสอน

##### ขั้นสอนหรือแสดง

1. ครูเตรียมกล่อง 2 กล่อง ใส่ตัวอักษร 3 ตัว โดยกล่องใบหนึ่งใส่ตัวอักษร 3 ตัว ที่แตกต่างกัน คือ A, B, C ส่วนกล่องที่ 2 จะใส่ตัวอักษร 3 ตัว โดยมีตัวหนึ่งใส่ซ้ำ 2 ตัว คือ A, A, B แล้วให้นักเรียนอาสาสมัครมาจัดเรียงอักษรใน 2 กล่องนี้ จากนั้นครูถามนักเรียนแต่ละกลุ่มว่าจัดเรียงอักษรได้กี่วิธี และจำนวนวิธีเท่ากันหรือไม่ อย่างไร

(แนวคำตอบ: จำนวนวิธีของแต่ละกลุ่มไม่เท่ากัน จำนวนวิธีที่มีของซ้ำกันจะน้อยกว่า มีรายละเอียด

ดังนี้

- กล่องที่ 1 ที่มีอักษร 3 ตัวที่แตกต่างกันทั้งหมด ได้แก่ A, B, C จะจัดได้ 6 วิธี ได้แก่ ABC , ACB , BAC , BCA , CAB ,CBA
- กล่องที่ 2 ที่มีอักษร 3 ตัวที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด ได้แก่ A, A, B จะจัดได้ 3 วิธี ได้แก่ AAB , ABA , BAA)

### ชั่วโมงที่ 2

##### ขั้นสอนหรือแสดง

2. ครูแจกใบงาน 2.5.1 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันและการแบ่งกลุ่ม ให้กับนักเรียน โดยให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 3-4 คน จากนั้นให้นักเรียนช่วยกันหาคำตอบในใบงาน

3. ครูสุ่มเรียกนักเรียนแต่ละกลุ่มออกมาแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละข้อ จากนั้นให้นักเรียนที่เหลือตรวจสอบคำตอบของตนเองพร้อมทั้งสังเกตวิธีการหาคำตอบ

### ชั่วโมงที่ 3

#### ขั้นสอนหรือแสดง

4. ครูเฉลยใบงานที่ 2.5.1 และให้นักเรียนร่วมกันหาข้อสรุปจากโจทย์ปัญหาทั้งหมด 10 ข้อ ว่ามีรูปแบบในรูปแฟกทอเรียล ดังนี้ ถ้าการจัดเรียงสับเปลี่ยนที่มีสิ่งของบางชิ้นซ้ำกันดังในใบงานวิธีการดังกล่าวสามารถ

สรุปได้ ดังนี้ ถ้ามีสิ่งของ  $n$  สิ่งและแบ่งออกเป็น  $k$  กลุ่ม

ในกลุ่มที่ 1 มีของ  $n_1$  สิ่งที่เหมือนกัน

ในกลุ่มที่ 2 มีของ  $n_2$  สิ่งที่เหมือนกัน

⋮

ในกลุ่มที่  $k$  มีของ  $n_k$  สิ่งที่เหมือนกัน

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนกลุ่มของสิ่งของ  $n$  สิ่ง เท่ากับ  $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$  วิธี

5. ครูบอกนักเรียนว่า การจัดเรียงสับเปลี่ยนแบบนี้จะเรียกว่าการจัดเรียงของซ้ำ

6. ครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 21 และ 22 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น เพื่อศึกษาวิธีการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน

7. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น เพื่อตรวจสอบความเข้าใจ จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ โดยครูเขียนคำตอบบนกระดาน

### ชั่วโมงที่ 4

#### ขั้นสอนหรือแสดง

8. ครูยกตัวอย่างการจัดเรียงของซ้ำที่ใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน เช่น

• **ตัวอย่างที่ 1** ต้องการจัดเรียงหนังสือ 6 เล่มที่แตกต่างกันทุกเล่มเป็นวิชาคณิตศาสตร์ 3 เล่ม วิชาภาษาอังกฤษ 2 เล่มและวิชาภาษาไทย 1 เล่ม จะมีวิธีจัดเรียงบนชั้นหนังสือได้กี่วิธี

(แนวคำตอบ: ตำแหน่งที่ 1 สามารถเลือกหนังสือมาวางได้ 6 เล่ม จะได้ 6 วิธี

ตำแหน่งที่ 2 สามารถเลือกหนังสือมาวางได้ 5 เล่ม จะได้ 5 วิธี

ตำแหน่งที่ 3 สามารถเลือกหนังสือมาวางได้ 4 เล่ม จะได้ 4 วิธี

ตำแหน่งที่ 4 สามารถเลือกหนังสือมาวางได้ 3 เล่ม จะได้ 3 วิธี

ตำแหน่งที่ 5 สามารถเลือกหนังสือมาวางได้ 2 เล่ม จะได้ 2 วิธี

ตำแหน่งที่ 6 สามารถเลือกหนังสือมาวางได้ 1 เล่ม จะได้ 1 วิธี

ดังนั้น จัดหนังสือ 6 เล่มที่แตกต่างกันได้เท่ากับ  $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 720$  วิธี

- **ตัวอย่างที่ 2** ต้องการจัดเรียงหนังสือ 6 เล่ม วางบนชั้นหนังสือ เป็นวิชาคณิตศาสตร์ 3 เล่ม วิชาภาษาอังกฤษ 2 เล่ม และวิชาภาษาไทย 1 เล่ม และหนังสือวิชาเดียวกันเหมือนกันจะจัดเรียงได้กี่วิธี

(แนวคำตอบ: หนังสือทั้งหมดมี 6 เล่ม แต่หนังสือวิชาเดียวกันเหมือนกัน

จึงถือว่าเป็นการจัดเรียง สับเปลี่ยนของซ้ำ

ขั้นตอนที่ 1 พิจารณาหนังสือ 6 เล่ม จัดได้ 6! วิธี

ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาวิชาคณิตศาสตร์ซ้ำกัน 3 เล่ม จะจัดได้  $\frac{6!}{3!}$

ขั้นตอนที่ 3 พิจารณาวิชาภาษาอังกฤษซ้ำกัน 2 เล่ม จะจัดได้  $\frac{6!}{3!2!}$

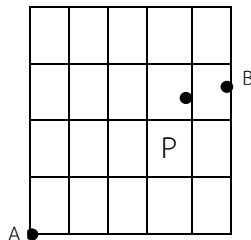
ดังนั้น จัดหนังสือ 6 เล่มได้เท่ากับ 60 วิธี)

9. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม 5 กลุ่ม แล้วทำแบบฝึก 2.2 ค ข้อ 1 - 5
10. ครูเรียกให้ตัวแทนของแต่ละกลุ่มมาอธิบายวิธีทำของโจทย์แบบฝึกหัดที่นักเรียนได้ทำไปกลุ่มละ 1 ข้อ
11. ครูอธิบายประกอบการอธิบายเฉลยคำตอบของนักเรียน

#### ชั่วโมงที่ 4

ขั้นสอนหรือแสดง

12. ครูยกตัวอย่างการนำวิธีการจัดเรียงสับเปลี่ยนของซ้ำไปประยุกต์ในการแก้โจทย์ปัญหาที่ซับซ้อนขึ้น เช่น **ตัวอย่างที่ 1**



จากรูปเป็นตารางช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด  $4 \times 5$  จากตารางนี้มีมดตัวหนึ่งจะเดินจากจุด A ไปยังจุด B ได้กี่วิธี ถ้ากำหนดว่าในการเดินทางต้องเดินขึ้นหรือเดินไปทางขวาเท่านั้น โดย

1. ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
  2. ต้องเดินผ่านจุด P
13. ครูอธิบายวิธีการหาคำตอบ ดังนี้

**แนวคิด** จากตัวอย่างที่ 1 ข้อย่อยที่ 1 ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม การเดินทางสมมติให้เดินขึ้นแทนด้วย N และเดินไปทางขวาแทนด้วย R

ดังนั้น มดจะเดินขึ้น (N) ได้ 4 ช่อง และทางขวา (R) อีก 5 ช่อง เสมอ จึงแทนเส้นทางเดินด้วย NNNN และ RRRRR รวม 9 แบบ โดยมี N ซ้ำ 4 แบบ และ R ซ้ำ 5 แบบ นั่นคือจะเป็นการเรียงสับเปลี่ยนของซ้ำนั่นเอง

$$\begin{aligned} \text{จะได้เท่ากับ } \frac{9!}{4!5!} &= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4 \times 3 \times 2 \times 5!} \\ &= 126 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

**แนวคิด** จากตัวอย่างที่ 1 ซ้อย่อยที่ 2 ต้องเดินผ่านจุด P จึงต้องแบ่งการทำงานออกเป็น 2 ขั้นตอน คือ **ขั้นตอนที่ 1** เดินทางจาก A ไป P จะเดินขึ้น (N) ได้ 2 ช่อง และเดินไปทางขวา (R) ได้ 4 ช่องทางเสมอ จำนวนเส้นทางเดินด้วย NN และ RRRR รวม 6 แบบ โดยมี N ซ้ำ 2 แบบ และ R ซ้ำ 4 แบบ

$$\text{จึงจะเห็นว่าได้จำนวนวิธีเท่ากับ } \frac{6!}{4!2!} = 15 \text{ วิธี}$$

**ขั้นตอนที่ 2** เดินทางจาก P ไป C จะเดินขึ้น (N) ได้ 2 ช่อง และเดินไปทางขวา (R) ได้ 1 ช่องทางเท่านั้น จึงแทนจำนวนเส้นทางเดินด้วย NN และ R รวม 3 แบบ โดยมี N ซ้ำ 2 แบบ จึงจะเห็นว่าได้จำนวน

$$\text{วิธีเท่ากับ } \frac{3!}{2!} = 3 \text{ วิธี}$$

รวมวิธีการเดินทางในขั้นตอนที่ 1 ต่อด้วยขั้นตอนที่ 2 โดยใช้กฎการคูณ เท่ากับ  $15 \times 3 = 45$  วิธีนั่นเอง

14. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 2.2 ค ข้อ 6 และแนวข้อสอบ PAT 1 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น เพื่อตรวจสอบความเข้าใจ

### ขั้นสรุป

1. ครูให้นักเรียนช่วยกันบอกความหมายและสูตรในการหาวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกัน และการแบ่งกลุ่ม

**(แนวคำตอบ:** ถ้ามีสิ่งของ  $k$  กลุ่ม ซึ่งในกลุ่มที่ 1 มีของ  $n_1$  สิ่งเหมือนกัน  
ในกลุ่มที่ 2 มีของ  $n_2$  สิ่งเหมือนกัน

⋮

ในกลุ่มที่  $k$  มีของ  $n_k$  สิ่งเหมือนกัน

$$\text{โดยที่ } n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนกลุ่มของสิ่งของ  $n$  สิ่ง เท่ากับ)  $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$  วิธี)

2. ครูให้นักเรียนเขียนสรุปความรู้รวบยอดเรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันและการแบ่งกลุ่ม ลงในสมุด

## การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่าง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้			
1) วิธีเรียงสับเปลี่ยนของ สิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกัน และการแบ่งกลุ่ม	- ตรวจสอบงานที่ 2.5.1 - ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ 2.2ค	- ใบงานที่ 2.5.1 - แบบฝึกทักษะ 2.2ค	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) นำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน	- แบบประเมินการ นำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงาน กลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่น ในการทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

## สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

### สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น
- 3) ใบงานที่ 2.5.1 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันและการแบ่งกลุ่ม

### แหล่งการเรียนรู้

-

ใบงานที่ 2.5.1

เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันและการแบ่งกลุ่ม

คำชี้แจง : ให้นักเรียนตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

คำศัพท์	มีตัวอักษรทั้งหมดกี่ตัว	มีตัวอักษรที่ซ้ำกันกี่ตัว	จัดเรียงได้กี่วิธี หาคำตอบโดยใช้การเขียนแผนภาพ	จำนวนวิธีจัดเรียง เขียนในรูปแฟกทอเรียล
1. ANT				
2. EGG				
3. TEN				
4. ADD				
5. PLAY				
6. ROOM				

คำศัพท์	มีตัวอักษร ทั้งหมดกี่ตัว	มีตัวอักษรที่ ซ้ำกันกี่ตัว	จัดเรียงได้กี่วิธี หากคำตอบ โดยใช้การเขียนแผนภาพ	จำนวนวิธีจัดเรียง เขียน ในรูปแฟกทอเรียล
7. FOUR				
8. FEEL				
9. AABBB				
10. ABCCC				

เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันและการแบ่งกลุ่ม

คำชี้แจง : ให้นักเรียนตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

คำศัพท์	มีตัวอักษรทั้งหมดกี่ตัว	มีตัวอักษรที่ซ้ำกันกี่ตัว	จัดเรียงได้กี่วิธี หาคำตอบโดยใช้การเขียนแผนภาพ	จำนวนวิธีจัดเรียง เขียนในรูปแฟกทอเรียล
1. ANT	3	0		3!
2. EGG	3	2		$\frac{3!}{2!}$
3. TEN	3	0		3!
4. ADD	3	2		$\frac{3!}{2!}$
5. PLAY	4	0		4!



คำศัพท์	มีตัวอักษรทั้งหมดกี่ตัว	มีตัวอักษรที่ซ้ำกันกี่ตัว	จัดเรียงได้กี่วิธี หากคำตอบโดยใช้การเขียนแผนภาพ	จำนวนวิธีจัดเรียง เขียนในรูปแฟกทอเรียล
6. ROOM	4	2		$\frac{4!}{2!}$

คำศัพท์	มีตัวอักษรทั้งหมดกี่ตัว	มีตัวอักษรที่ซ้ำกันกี่ตัว	จัดเรียงได้กี่วิธี หากคำตอบโดยใช้การเขียนแผนภาพ	จำนวนวิธีจัดเรียง เขียนในรูปแฟกทอเรียล
7. FOUR	4	0		4!
8. FEEL	4	2		$\frac{4!}{2!}$

คำศัพท์	มีตัวอักษรทั้งหมดกี่ตัว	มีตัวอักษรที่ซ้ำกันกี่ตัว	จัดเรียงได้กี่วิธี หาคำตอบโดยใช้การเขียนแผนภาพ	จำนวนวิธีจัดเรียง เขียนในรูปแฟกทอเรียล
9. AABBB	5	2 ตัว และ 3 ตัว		$\frac{5!}{2! 3!}$
10. ABCCC	5	3 ตัว		$\frac{5!}{3!}$

คำศัพท์	มีตัวอักษรทั้งหมดกี่ตัว	มีตัวอักษรที่ซ้ำกันกี่ตัว	จัดเรียงได้กี่วิธี หาคำตอบโดยใช้การเขียนแผนภาพ	จำนวนวิธีจัดเรียง เขียนในรูปแฟกทอเรียล
			<p>     A — B — C — C          C — B — C          C — B      B — A — C — C          C — A — C          C — A      C — A — B — C          C — B          C — B      C — B — A — C          C — A          C — A      C — A — B          B — A   </p>	

## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

จำนวน 30 ชั่วโมง

เรื่อง วิธีจัดหมู่

จำนวน 4 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

### ผลการเรียนรู้

เข้าใจและใช้หลักการบวกและการคูณ การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดหมู่ในการแก้ปัญหา

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) หาจำนวนวิธีจัดหมู่ได้ (K)
- 2) เขียนแสดงขั้นตอนของวิธีจัดหมู่ได้ (P)
- 3) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

### สาระการเรียนรู้

การจัดหมู่กรณีสิ่งของต่างกันทั้งหมด

### สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

จำนวนวิธีการจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน  $n$  สิ่ง โดยเลือกคราวละ  $r$  สิ่ง ( $0 \leq r \leq n$ ) เท่ากับ  $C_{n,r}$

หรือ  $\binom{n}{r}$  วิธี เมื่อ  $C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

### สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร	1. มีวินัย
2. ความสามารถในการคิด	2. ใฝ่เรียนรู้
1) ทักษะการระบุ	3. มุ่งมั่นในการทำงาน
2) ทักษะการคิดคล่อง	
3) ทักษะกระบวนการคิด	
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	

## กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : อุปนัย (Induction)

### ชั่วโมงที่ 1

#### ขั้นนำ

##### ขั้นเตรียม

1. ครูยกตัวอย่างสถานการณ์เดียวกันกับใบงานที่ 2.3.1 ว่ามีสิ่งของ 3 สิ่ง หยิบของมาทีละ 2 สิ่ง จะเห็นว่าการหยิบขึ้นมาพร้อมกัน 2 สิ่ง ไม่มีลำดับก่อนหลังหรือการสลับที่ไม่นับเป็นอีกวิธี หรือมีอักษร 3 ตัว ได้แก่ B, E, D นำมาจัดเรียงจามเงื่อนไขต่อไปนี้

1) นำมาจัดเรียงหมดทุกตัวเป็นเส้นตรง จะได้  $3!$  วิธี คือ BED, BDE, EBD, EDB, DBE, DEB

2) นำมาจัดเรียงสับเปลี่ยนทีละ 2 ตัว จะได้เป็น  $P_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = 3!$  วิธี คือ BE, BD, EB, ED,

DB, DE

3) นำมาจัดหมู่ทีละ 2 ตัว จะได้ BE, BD และ ED เท่านั้น ซึ่งคล้ายกับการจัดเรียงเป็น  $P_{n,r}$  แต่จัดหมู่ทีละ  $r$  สิ่งไม่มีอันดับ จึงนำการจัดเรียงจาก  $r$  สิ่ง เท่ากับ  $r!$  มาหารออกจาก  $P_{n,r}$  จะได้เท่ากับ  $\frac{n!}{(n-r)!r!}$

2. ครูอธิบายให้นักเรียนฟังต่อว่า เมื่อนำสิ่งของ  $n$  สิ่ง มาจัดหมู่ทีละ  $r$  สิ่ง นั่นคือ  $\frac{P_{n,r}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

#### ขั้นสอน

##### ขั้นสอนหรือแสดง

1. ครูแจกใบงานที่ 2.6.1 เรื่อง วิธีจัดหมู่ ให้กับนักเรียน แล้วให้นักเรียนลงมือทำ โดยใช้เวลาประมาณ 15 นาที

2. ครูกล่าวว่า การจัดหมู่ของสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยเลือกมาคราวละ  $r$  สิ่ง ( $0 \leq r \leq n$ )

เรา เรียกว่า การจัดหมู่ (Combination) เขียนแทนด้วย  $C_{n,r}$  หรือ  ${}^nC_r$  หรือ  $\binom{n}{r}$

สามารถแสดงได้ดังนี้  $C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

จาก  $C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$   
 $= \frac{n!}{(n-(n-r))!(n-r)!}$   
 $= C_{n,n-r}$

$$\text{ดังนั้น } \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

## ชั่วโมงที่ 2

### ชั้นสอนหรือแสดง

3. ครูให้นักเรียนฝึกหาค่า  $C_{n,r}$  โดยกำหนดโจทย์ดังนี้

$$1) \binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2}{2}$$

$$2) \binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3}$$

$$3) \binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$$

$$4) \binom{5}{0}, \binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{5}{4}, \binom{5}{5}$$

(แนวคำตอบ:

$$1) \binom{2}{0} = \frac{2!}{2!0!} = 1$$

$$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!1!} = 2$$

$$\binom{2}{2} = \frac{2!}{0!2!} = 1$$

$$2) \binom{3}{0} = \frac{3!}{3!0!} = 1$$

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{1!2!} = 3$$

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{0!3!} = 1$$

$$\begin{aligned}
3) \binom{4}{0} &= \frac{4!}{4!0!} = 1 \\
\binom{4}{1} &= \frac{4!}{3!1!} = 4 \\
\binom{4}{2} &= \frac{4!}{2!2!} = 6 \\
\binom{4}{3} &= \frac{4!}{1!3!} = 4 \\
\binom{4}{4} &= \frac{4!}{0!4!} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \binom{5}{0} &= \frac{5!}{5!0!} = 1 \\
\binom{5}{1} &= \frac{5!}{4!1!} = 5 \\
\binom{5}{2} &= \frac{5!}{3!2!} = 10 \\
\binom{5}{3} &= \frac{5!}{2!3!} = 10 \\
\binom{5}{4} &= \frac{5!}{1!4!} = 5 \\
\binom{5}{5} &= \frac{5!}{0!5!} = 1
\end{aligned}$$

2. ครูให้นักเรียนสังเกตค่าของ  $C_{n,r}$  ที่หาได้เรียงตามลำดับ มีความสัมพันธ์อย่างไรบ้าง

$$1) \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$2) \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$3) \binom{n}{r} = \binom{n}{k} \text{ ถ้า } r+k=n \text{ เมื่อ } 0 \leq k \leq n$$

$$4) \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$$



$$5) \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$6) \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n - 1$$

ครูกล่าวว่าความสัมพันธ์ข้างต้นที่ค้นพบเราเรียกว่า สมบัติของการจัดหมู่

3. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 29 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น

4. ครูให้นักเรียนทำ ลองทำดู ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้นเพื่อตรวจสอบความเข้าใจ จากนั้นครูและนักเรียน ร่วมกันเฉลยคำตอบ

### ชั่วโมงที่ 3

ขั้นสอนหรือแสดง

5. ครูยกตัวอย่างดังต่อไปนี้

**ตัวอย่างที่ 1** มีนักเรียนชาย 5 คน นักเรียนหญิง 4 คน ต้องการคัดเลือกคณะกรรมการห้องเรียน 4 คน โดย เป็นชาย 2 คน และหญิง 2 คน จะเลือกได้ทั้งหมดกี่วิธี

(แนวคำตอบ: เลือกชาย 2 คน จากชาย 5 คน โดยไม่คิดตำแหน่งเพราะเป็นคณะกรรมการเหมือนกันจะได้จำนวนวิธีคือ  $C_{5,2}$  และเลือกกรรมการหญิง 2 คน จาก 4 คน จะได้จำนวนวิธีคือ  $C_{4,2}$

ดังนั้น จะมีวิธีเลือกคณะกรรมการได้ทั้งหมด  $\binom{5}{2} \binom{4}{2} = 60$  วิธี)

**ตัวอย่างที่ 2** กล่องใบหนึ่งมีลูกแก้ว 10 ลูก เป็นสีแดง 3 ลูก สีเหลือง 4 ลูก สีฟ้า 3 ลูก จำนวนวิธีหยิบลูกแก้วพร้อมกัน 2 ลูก แล้วได้ลูกแก้วสีต่างกันมีค่าเท่าไร

(แนวคำตอบ: มีการทำงาน 2 ขั้นตอน คือ

ขั้นตอนที่ 1 เลือกสี 2 สีจากทั้งหมด 3 สี จัดได้  $\binom{3}{2} = 3$  วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกจำนวนลูกแก้ว 2 ลูก จากแต่ละคู่สี ดังนี้ (แดง,เหลือง) (แดง,ฟ้า) (เหลือง,ฟ้า)

ดังนั้น จะได้จำนวนวิธีคือ  $\binom{3}{1} \binom{4}{1} + \binom{3}{1} \binom{3}{1} + \binom{4}{1} \binom{3}{1}$

$$= 12 + 9 + 12$$

$$= 33 \text{ วิธี}$$

**ตัวอย่างที่ 3** นักเรียนต้องเลือกทำข้อสอบ 8 ข้อ จากข้อสอบ 10 ข้อ เขาจะมีวิธีเลือกทำข้อสอบได้กี่วิธี เมื่อเขาต้องเลือกทำอย่างน้อย 4 ข้อจาก 5 ข้อแรก

(แนวคำตอบ: แบ่งได้ 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 เลือกทำ 4 ข้อ จาก 5 ข้อแรก

กรณีที่ 2 เลือกทำ 5 ข้อ จาก 5 ข้อแรก

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น จะได้จำนวนวิธีคือ } & \binom{5}{4} \binom{5}{4} + \binom{5}{5} \binom{5}{3} \\ & = 25 + 10 \\ & = 35 \text{ วิธี) } \end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 4** มีคน 8 คน เป็นชาย 3 คน หญิง 5 คน เลือกคนมาคราวละ 4 คน โดยทุกครั้งที่ต้องมีชายอยู่ด้วยเสมอ จะทำได้กี่วิธี

(แนวคำตอบ: จากโจทย์ที่กำหนดว่าทุกครั้งต้องมีชายอยู่ด้วยเสมอ หมายความว่า จะต้องมีชายอย่างน้อย 1 คน ดังนั้นจะสามารถแบ่งได้ 3 กรณี คือ

กรณีที่ 1 เลือกชาย 1 คน หญิง 3 คน

กรณีที่ 2 เลือกชาย 2 คน หญิง 2 คน

กรณีที่ 3 เลือกชาย 3 คน หญิง 1 คน

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น จะได้จำนวนวิธีคือ } & \binom{3}{1} \binom{5}{3} + \binom{3}{2} \binom{5}{2} + \binom{3}{3} \binom{5}{1} \\ & = 30 + 30 + 5 \\ & = 65 \text{ วิธี) } \end{aligned}$$

หรืออาจคิดได้อีก 1 วิธี โดยการหาจำนวนวิธีที่ไม่ต้องการไปลบออกจากจำนวนวิธีทั้งหมดที่ไม่มีเงื่อนไข

ดังนี้ จำนวนวิธีการเลือกแบบไม่มีเงื่อนไขคือ มี 8 คน เลือกมา 4 คน จะได้เท่ากับ  $\binom{8}{4}$  วิธี และจำนวน

วิธีเลือกคนเป็นผู้หญิงทั้งหมด 4 คน จะได้เท่ากับ  $\binom{5}{4}$  วิธี

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น จะมีวิธีจัดที่ต้องมีชายอย่างน้อย 1 คน เท่ากับ } & \binom{8}{4} - \binom{5}{4} \\ & = 70 - 5 \\ & = 65 \text{ วิธี) } \end{aligned}$$

5. ครูสรุปจากตัวอย่าง 4 ว่า ถ้าเราต้องการหาจำนวนวิธีจัดสิ่งของที่มีหลายกรณี สามารถหาคกลับกัน โดยหาวิธีการทั้งหมดที่ไม่มีเงื่อนไข แล้วลบด้วยจำนวนวิธีที่เราไม่ต้องการแทนได้

#### ชั่วโมงที่ 4

##### ชั้นสอนหรือแสดง

7. ครูกล่าวว่าการจัดหมุนั้นสามารถนำไปใช้กับการจัดเกี่ยวกับรูปเรขาคณิตได้ เช่น

**ตัวอย่างที่ 1** มีจุด 8 จุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันจะสร้างรูปหลายเหลี่ยมได้ทั้งหมดกี่วิธี

(**แนวคำตอบ:** จำนวนจุดมี 8 จุด และไม่มีจุดใดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน แสดงว่าทุกจุดเป็นจุดยอดมุมของรูปหลายเหลี่ยมได้และการสร้างรูปหลายเหลี่ยมจะมีการสร้างได้ตั้งแต่รูปสามเหลี่ยม ไปจนถึงรูปแปดเหลี่ยม ดังนี้

1) สร้างรูปสามเหลี่ยม ใช้จุดยอด 3 จุด จากจุด 8 จุด จะจัดได้  $\binom{8}{3}$  แบบ

2) สร้างรูปสี่เหลี่ยม ใช้จุดยอด 4 จุด จากจุด 8 จุด จะจัดได้  $\binom{8}{4}$  แบบ

3) สร้างรูปห้าเหลี่ยม ใช้จุดยอด 5 จุด จากจุด 8 จุด จะจัดได้  $\binom{8}{5}$  แบบ

4) สร้างรูปหกเหลี่ยม ใช้จุดยอด 6 จุด จากจุด 8 จุด จะจัดได้  $\binom{8}{6}$  แบบ

5) สร้างรูปเจ็ดเหลี่ยม ใช้จุดยอด 7 จุด จากจุด 8 จุด จะจัดได้  $\binom{8}{7}$  แบบ

6) สร้างรูปแปดเหลี่ยม ใช้จุดยอด 8 จุด จากจุด 8 จุด จะจัดได้  $\binom{8}{8}$  แบบ

ดังนั้น จะสามารถสร้างรูปหลายเหลี่ยมได้ทั้งหมด เท่ากับ

$$\begin{aligned} & \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} \\ & = 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 \\ & = 219 \text{ รูปแบบ} \end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 2** มีเส้นตรงอยู่ 2 ชุด แบ่งเป็นชุดแนวนอน 6 เส้น และชุดแนวตั้ง 5 เส้น ลากตัดกันจนเกิดรูปสี่เหลี่ยม จงหาจำนวนรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่สร้างได้ทั้งหมด

(**แนวคำตอบ:** เลือกเส้นตรงเพื่อสร้างรูปสี่เหลี่ยมได้ คือ

$$\begin{aligned} \binom{6}{2} \binom{5}{2} &= \left( \frac{6!}{(6-2)!2!} \right) \cdot \left( \frac{5!}{(5-2)!2!} \right) \\ &= \left( \frac{6 \times 5 \times 4}{4!} \right) \cdot \left( \frac{5 \times 4 \times 3}{3!} \right) \\ &= 15 \cdot 10 \\ &= 150 \text{ แบบ} \end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 3** พ่อ แม่ และลูกอีก 3 คน ไปพักผ่อนที่รีสอร์ทแห่งหนึ่ง ได้จองห้องพัก 2 ห้อง โดยแต่ละห้องสามารถพักได้ 3 คน จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดคนในครอบครัวนี้เข้าพัก โดยพ่อและแม่แยกกัน พักคนละห้อง  
(แนวคำตอบ: ขั้นตอนที่ 1 ให้พ่อหรือแม่เลือกห้องพักก่อนจะได้ 2 วิธี และพ่อหรือแม่ที่เหลือจะเลือกห้องพักได้อีก 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 ลูก 3 คน ต้องแยกกันพักเป็นอัตราส่วน 2 : 1 นั่นคือ  
เลือกลูก 2 คน นอนกับพ่อหรือแม่ จะได้  $\binom{3}{2} \times 2 = 6$  วิธี  
และลูก 1 คนที่เหลือเลือกได้ 1 วิธี)  
ดังนั้น จำนวนวิธีการจัดคนเข้าพักทั้งหมดเท่ากับ  $2 \times 1 \times 6 \times 1 = 12$  วิธี)

**ตัวอย่างที่ 4** ตู้จดหมาย 3 ตู้ มีจดหมาย 7 ฉบับ โดยกำหนดให้ใส่ตู้ที่ 1 ได้ 3 ฉบับ ตู้ที่ 2 ได้ 2 ฉบับ ตู้ที่ 2 ได้ 2 ฉบับ จะมีวิธีใส่ได้กี่วิธี

(แนวคำตอบ: ขั้นตอนที่ 1 เลือกจดหมาย 3 ฉบับใส่ตู้ที่ 1 จะได้  $\binom{7}{3}$  วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกจดหมาย 2 ฉบับใส่ตู้ที่ 2 จะได้  $\binom{4}{2}$  วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกจดหมาย 2 ฉบับใส่ตู้ที่ 3 จะได้  $\binom{2}{2}$  วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีใส่จดหมายได้  $\binom{7}{3} \binom{4}{2} \binom{2}{2} = 210$  วิธี

หรือจะมองว่าการจัดจดหมายใส่ในตู้ในตู้ที่นั่นเท่ากับเป็นการจัดของซ้ำ สามารถใช้วิธีจัดของซ้ำได้เท่ากับ

$$\frac{7!}{3!2!2!} = 210 \text{ วิธี}$$

8. ครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 30–36 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น

9. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.3 ข้อ 8 และ 9 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้นเพื่อตรวจสอบความเข้าใจ

### ขั้นสรุป

1. ครูให้นักเรียนช่วยกันบอกขั้นตอนในการหาจำนวนวิธีของการจัดหมู่สิ่งของ
2. ครูให้นักเรียนเขียนสรุปความรู้รวบยอดเรื่อง วิธีจัดหมู่ ลงในสมุด

## การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่าง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) วิธีจัดหมู่	- ตรวจสอบใบงานที่ 2.6.1 - ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ 2.3	- ใบงานที่ 2.6.1 - แบบฝึกทักษะ 2.3	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) นำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน	- แบบประเมินการ นำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่น ในการทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

## สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

### สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น
- 3) ใบงานที่ 2.6.1 เรื่อง วิธีจัดหมู่

### แหล่งการเรียนรู้

-

## ใบงานที่ 2.6.1

### เรื่อง วิธีจัดหมู่

คำชี้แจง : ให้นักเรียนตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

กำหนดจำนวนของ $n$ สิ่ง	จัดหมู่ทีละ $r$ สิ่ง	จำนวนวิธีที่จัดได้
1. ส้ม มะม่วง แอปเปิ้ล	จัดใส่จาน จานละ 2 ชนิด	
2. ตัวอักษร 4 ตัว ที่แตกต่างกัน คือ CRAB	หยิบมาจัดคำใหม่ ทีละ 2 ตัวอักษร	
3. ตัวอักษร 4 ตัว ที่แตกต่างกัน คือ CRAB	หยิบมาจัดคำใหม่ ทีละ 3 ตัวอักษร	
4. นักเรียน 5 คน	เลือกกรรมการห้อง 2 คน	
5. นักเรียน 5 คน	เลือกกรรมการห้อง 3 คน	

เรื่อง วิธีจัดหมู่

คำชี้แจง : ให้นักเรียนตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

กำหนดจำนวนของ n สิ่ง	จัดหมู่ทีละ r สิ่ง	จำนวนวิธีที่จัดได้
1. ส้ม มะม่วง แอปเปิ้ล	จัดใส่จาน จานละ 2 ชนิด	$C_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!2!}$ $= 3 \text{ วิธี}$
2. ตัวอักษร 4 ตัว ที่แตกต่างกัน คือ CRAB	หยิบมาจัดคำใหม่ ทีละ 2 ตัวอักษร	$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!2!}$ $= 6 \text{ วิธี}$
3. ตัวอักษร 4 ตัว ที่แตกต่างกัน คือ CRAB	หยิบมาจัดคำใหม่ ทีละ 3 ตัวอักษร	$C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!3!}$ $= 4 \text{ วิธี}$
4. นักเรียน 5 คน	เลือกกรรมการห้อง 2 คน	$C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!2!}$ $= 10 \text{ วิธี}$
5. นักเรียน 5 คน	เลือกกรรมการห้อง 3 คน	$C_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!3!}$ $= 10 \text{ วิธี}$

## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

จำนวน 30 ชั่วโมง

เรื่อง โจทย์ระคน

จำนวน 5 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

### ผลการเรียนรู้

เข้าใจและใช้หลักการบวกและการคูณ การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดหมู่ในการแก้ปัญหา

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) หาจำนวนวิธีของการจัดเรียงในแบบต่างๆได้ (K)
- 2) ใช้ความรู้เรื่องหลักการนับเบื้องต้นในกระบวนการแก้ปัญหาได้ (P)
- 3) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

### สาระการเรียนรู้

- หลักการบวกและการคูณ
- การเรียงสับเปลี่ยน
- การจัดหมู่

### สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

#### กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

- หลักการคูณ (ถ้างานมีหลายขั้นตอนให้นำจำนวนวิธีในแต่ละขั้นตอนมาคูณกัน)
- หลักการบวก (ถ้างานนั้นสามารถทำได้หลายกรณีให้นำจำนวนวิธีที่ทำได้ในแต่ละกรณีมาบวกกัน)

#### การเรียงสับเปลี่ยน

- การเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดเป็นแนวตรง เท่ากับ  $n!$  วิธี
- การเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมดในแนวตรง โดยจัดเรียงคราวละ  $r$  สิ่ง

$(0 \leq r \leq n)$  เท่ากับ  $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$  วิธี

- การเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกัน เท่ากับ  $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$  วิธี
- วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมแบบ 2 มิติได้  $(n-1)!$  วิธี
- วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมแบบ 3 มิติได้  $\frac{(n-1)!}{2}$  วิธี



## การจัดหมู่


วิธีการจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน  $n$  สิ่ง โดยเลือกคราวละ  $r$  สิ่ง ( $0 \leq r \leq n$ ) เท่ากับ

$$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

### สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร	1. มีวินัย
2. ความสามารถในการคิด	2. ใฝ่เรียนรู้
1) ทักษะการนำความรู้ไปใช้	3. มุ่งมั่นในการทำงาน
2) ทักษะการคิดคล่อง	
3) ทักษะกระบวนการคิด	
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	

### กิจกรรมการเรียนรู้

 แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : นิรนัย (Deduction)

#### ชั่วโมงที่ 1

#### ขั้นนำ

1. ครูทบทวนหลักการนับเบื้องต้นที่ใช้ในการหาวิธีการจัดเรียงสิ่งของแบบต่าง ๆ

1) กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

- หลักการคูณ (ถ้างานมีหลายขั้นตอนให้นำจำนวนวิธีในแต่ละขั้นตอนมาคูณกัน)
- หลักการบวก (ถ้างานนั้นสามารถทำได้หลายกรณีให้นำจำนวนวิธีที่ได้ในแต่ละกรณีมาบวกกัน)

2) การเรียงสับเปลี่ยน

- การเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดเป็นแนวตรง เท่ากับ  $n!$  วิธี
- การเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมดในแนวตรง โดยจัดเรียงคราวละ  $r$  สิ่ง

( $0 \leq r \leq n$ ) เท่ากับ  $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$  วิธี

- การเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกัน เท่ากับ  $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$  วิธี

- วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมแบบ 2 มิติได้  $(n-1)!$  วิธี

- วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมแบบ 3 มิติได้  $\frac{(n-1)!}{2}$  วิธี

### 3) การจัดหมู่

วิธีการจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน  $n$  สิ่ง โดยเลือกคราวละ  $r$  สิ่ง ( $0 \leq r \leq n$ )

$$\text{เท่ากับ } C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

#### ชั้นสอน

2. ครูแจกใบงานที่ 2.7.1 โจทย์ระคน จากนั้นให้นักเรียนลงมือทำใบงาน โดยใช้เวลาประมาณ 15 นาที และร่วมกันเฉลยโดยครูตรวจสอบความถูกต้อง

#### ชั่วโมงที่ 2

3. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มกลุ่มละ 3 – 4 คน ช่วยกันแต่งโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเรื่องที่เราเรียนมาทั้งหมด กลุ่มละ 4 ข้อ พร้อมทั้งแสดงวิธีทำในแต่ละข้ออย่างละเอียด

4. ครูดำเนินการแลกเปลี่ยนโจทย์ปัญหาที่แต่ละกลุ่มคิดขึ้นสลับกับนักเรียนกลุ่มอื่น ๆ และให้นักเรียนกลุ่มที่ได้รับแสดงวิธีทำพร้อมทั้งออกมานำเสนอหน้าชั้นเรียน โดยให้นักเรียนกลุ่มที่เป็นเจ้าของโจทย์ปัญหานั้นตรวจสอบความถูกต้อง

#### ชั่วโมงที่ 3

5. ครูยกตัวอย่างโจทย์ปัญหาที่สามารถดำเนินการได้.... เช่น ไฟสำหรับหนึ่งมี 52 ไบ หยิบไฟจากรับ 4 ไบ จะมีวิธีการหยิบได้กี่วิธี ถ้า

- 1) ไม่มีเงื่อนไข
- 2) ได้ไฟดอกเดียวกันทั้ง 4 ไบ
- 3) ได้ไฟ A 2 ไบ และไฟไบอื่นๆอีก 2 ไบ
- 4) ได้ไฟ J 2 ไบ และได้ไฟ Q 2 ไบ
- 5) ได้ไฟ K อย่างน้อย 2 ไบ

6. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มออกเป็น 5 กลุ่มแล้วให้แต่ละกลุ่มจับฉลากเลือกแก้โจทย์ปัญหาจากเงื่อนไข ทั้ง 5 ข้อ กลุ่มละ 1 ข้อ

7. ครูให้เวลานักเรียนแต่ละกลุ่มในการแก้โจทย์ปัญหาประมาณ 10 นาที จากนั้นให้แต่ละกลุ่มส่งตัวแทนออกมานำเสนอ กลุ่มละ 5 นาที

8. ครูพิจารณาคำตอบของนักเรียนที่ออกมานำเสนอพร้อมทั้งอธิบายเพิ่มเติม

(แนวคำตอบ: 1) ไม่มีเงื่อนไข

$$\begin{aligned} \text{จำนวนวิธีหยิบไฟได้เท่ากับ } 2 \times 51 \times 50 \times 4 &= \frac{52!}{(52-4)!4!} \\ &= \frac{52 \times 51 \times 50 \times 4!}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= 270,725 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

2) ได้ไฟดอกเดียวกันทั้ง 4 ใบ

เนื่องจากไฟมี 4 ดอก ได้แก่ ดอกจิก ข้าวหลามตัด โปธิ์แดงและโปธิ์ดำ อย่างละ 13 ใบ

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น แต่ละดอกจะเลือกได้ } \binom{13}{4} \times 04 &= \frac{13!}{(13-4)!4!} \\ &= \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10!}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= 2,860 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

3) ได้ไฟ A 2 ใบ และไฟใบอื่นๆอีก 2 ใบ

ต้องการไฟ A 2 ใบ จากทั้งหมด 4 ใบ และไฟใบอื่นๆที่ไม่ใช่ A อีก 2 ใบจากไฟที่เหลืออยู่

48 ใบ

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น จะจัดได้ } \binom{4}{2} \binom{48}{2} &= \frac{4!}{(4-2)!2!} \times \frac{48!}{(48-2)!2!} \\ &= \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{48 \times 47}{2 \times 1} \\ &= 6,768 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

4) ได้ไฟ J 2 ใบ และได้ไฟ Q 2 ใบ

ต้องการไฟ J 2 ใบจากทั้งหมด 4 ใบ และไฟ Q 2 ใบจากทั้งหมด 4 ใบ

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น จะจัดได้ } \binom{4}{2} \binom{4}{2} &= \frac{4!}{(4-2)!2!} \times \frac{4!}{(4-2)!2!} \\ &= \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \\ &= 36 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

5) ได้ไฟ K อย่างน้อย 2 ใบ

ต้องการไฟ K อย่างน้อย 2 ใบ หมายความว่าอาจจะได้ 2 ใบ 3 ใบหรือ 4 ใบก็ได้  
กรณีที่ 1 เลือกไฟ K 2 ใบ และไฟใบอื่นๆที่ไม่ใช่ K อีก 2 ใบจากไฟ 48 ใบ

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น จะจัดได้ } \binom{4}{2} \binom{48}{2} &= \frac{4!}{(4-2)!2!} \times \frac{48!}{(48-2)!2!} \\ &= \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{48 \times 47}{2 \times 1} \\ &= 6,768 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 เลือกไฟ K 3 ใบ และไฟใบอื่นๆที่ไม่ใช่ K อีก 1 ใบจากไฟ 48 ใบ

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น จะจัดได้ } \binom{4}{3} \binom{48}{1} &= \frac{4!}{(4-3)!3!} \times \frac{48!}{(48-1)!1!} \\ &= 4 \times 48 \\ &= 192 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

กรณีที่ 3 เลือกไฟ K 4 ใบ จะได้ 1 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ  $6,768 + 192 + 1 = 6,961$  วิธี)

9. ครูให้นักเรียนพิจารณาว่าในแต่ละข้อที่นำเสนอไปนั้น ข้อใดคิดหาคำตอบได้ง่ายที่สุด เพราะเหตุใด  
(แนวคำตอบ: ข้อ 1) เพราะไม่มีเงื่อนไขใด ๆ ในการพิจารณา)

ชั่วโมงที่ 4

10. ครูให้นักเรียนพิจารณาแนวข้อสอบ PAT1 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น พร้อมแสดงวิธีทำอย่างละเอียดบนกระดาน

11. ครูให้นักเรียนหาข้อสอบ PAT 1 ที่เกี่ยวกับเรื่องหลักการนับเบื้องต้น พร้อมเฉลยและระบุปีการศึกษาของข้อสอบมาคนละ 2 ข้อ เขียนลงในกระดาษ A4 ส่งภายในคาบเรียน

ชั่วโมงที่ 5

12. ครูยกตัวอย่างโจทย์ปัญหาที่น่าสนใจเกี่ยวกับหลักการนับเบื้องต้น เช่น

1) กุญแจชนิดหนึ่งมีรหัสตัวเลข 6 หลัก 0-5 อยู่ 4 วงซ้อนกันจะต้องหมุนรหัสแต่ละวงให้ตรงกับรหัสที่ตั้งไว้จะมีกี่วิธีที่จะเปิดกุญแจไม่ออก

(แนวคำตอบ: วงที่ 1 สร้างรหัสได้ 6 แบบ

วงที่ 2 สร้างรหัสได้ 6 แบบ

วงที่ 3 สร้างรหัสได้ 6 แบบ

วงที่ 4 สร้างรหัสได้ 6 แบบ

ดังนั้น รหัสที่ตั้งได้ทั้งหมด  $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1,296$  วิธี

แต่เราสามารถตั้งรหัสได้เพียง 1 แบบ จึงมีรหัสที่เปิดไม่ออกอยู่  $1,296 - 1 = 1,295$  วิธี)

2) มีนก 5 ตัว มีกิ่งไม้ 3 กิ่ง จงหาว่า

2.1) ไม่มีเงื่อนไข

(แนวคำตอบ: นกตัวที่ 1 เลือกกิ่งไม้ได้ 3 วิธี

นกตัวที่ 2 เลือกกิ่งไม้ได้ 3 วิธี

นกตัวที่ 3 เลือกกิ่งไม้ได้ 3 วิธี

นกตัวที่ 4 เลือกกิ่งไม้ได้ 3 วิธี

นกตัวที่ 5 เลือกกิ่งไม้ได้ 3 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ  $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$  วิธี)

2.2) ถ้าจำฝูงเกาะกิ่งใด นกตัวอื่นจะเกาะกิ่งไม้นั้นไม่ได้

(แนวคำตอบ: จำฝูง เลือกกิ่งไม้ได้ 3 วิธี

นกตัวที่เหลืออีก 4 ตัว เลือกกิ่งไม้ได้ตัวละ 2 วิธี จะได้  $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$  วิธี)

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ  $3 \times 16 = 48$  วิธี

3) อาคารแห่งหนึ่งมีประตู 6 ประตู ถ้านักเรียน 3 คน ต้องการเข้าและออกจากอาคารแห่งนี้ได้กี่วิธี

3.1) ถ้าทั้ง 3 คน เข้าและออกประตูใดก็ได้

(แนวคำตอบ: คนที่ 1 เข้าได้ 6 วิธี และออกได้ 6 วิธี จะได้เท่ากับ  $6 \times 6 = 36$  วิธี

คนที่ 2 เข้าได้ 6 วิธี และออกได้ 6 วิธี จะได้เท่ากับ  $6 \times 6 = 36$  วิธี

คนที่ 3 เข้าได้ 6 วิธี และออกได้ 6 วิธี จะได้เท่ากับ  $6 \times 6 = 36$  วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ  $36 \times 36 \times 36 = 46,656$  วิธี)

3.2) ถ้าแต่ละคนเข้าประตูใดจะต้องออกประตูนั้น

(แนวคำตอบ: คนที่ 1 เข้าได้ 6 วิธี และออกได้ 1 วิธี จะได้เท่ากับ  $6 \times 1 = 6$  วิธี

คนที่ 2 เข้าได้ 6 วิธี และออกได้ 1 วิธี จะได้เท่ากับ  $6 \times 1 = 6$  วิธี

คนที่ 3 เข้าได้ 6 วิธี และออกได้ 1 วิธี จะได้เท่ากับ  $6 \times 1 = 6$  วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ  $6 \times 6 \times 6 = 216$  วิธี)

3.3) แต่ละคนเข้าประตูใดจะออกประตูนั้นไม่ได้และทั้งสามคนจะไม่ใช้วิธีเดียวกัน

(แนวคำตอบ: คนที่ 1 เข้าได้ 6 วิธี และออกได้ 5 วิธี จะได้เท่ากับ  $6 \times 5 = 30$  วิธี

คนที่ 2 เข้าและออกได้ 29 วิธี (ไม่ซ้ำกับคนที่ 1)

คนที่ 3 เข้าและออกได้ 28 วิธี (ไม่ซ้ำกับคนที่ 1 และคนที่ 2)

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ  $30 \times 29 \times 28 = 24,360$  วิธี)

### ขั้นสรุป

1. ครูให้นักเรียนทบทวนความรู้เรื่อง หลักการนับเบื้องต้น
2. ครูให้นักเรียนเขียนสรุปความรู้รวบยอดเรื่อง หลักการนับเบื้องต้น ลงในสมุด

### การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่าง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้			
1) โจทย์ระคน	- ตรวจใบงานที่ 2.7.1	- ใบงานที่ 2.7.1	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) นำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน	- แบบประเมินการ นำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการ ทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการ ทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงาน กลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการ ทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการ ทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่น ในการทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

### สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

#### สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น
- 3) ใบงานที่ 2.7.1 เรื่อง โจทย์ระคน

#### แหล่งการเรียนรู้

-

## ใบงานที่ 2.7.1

### เรื่อง โจทย์ระคน

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนแสดงวิธีทำ

1. มีอาหารคาว 5 ชนิด อาหารหวาน 3 ชนิด และน้ำดื่ม 4 ชนิด ให้เลือกมารับประทานอาหารอย่างละ 1 ชนิด จะมีรายการอาหารคาว อาหารหวาน และน้ำดื่ม แตกต่างกันได้กี่แบบ

.....

.....

.....

2. นักเรียนต้องการเดินทางจังหวัดลำปางโดยออกจากกรุงเทพฯ ไปยังอยุธยาได้ 3 เส้นทางและจากอยุธยาไปยังลำปางได้ 4 เส้นทาง จะสามารถเดินทางไปและกลับได้โดยไม่ใช้เส้นทางเดิมได้กี่วิธี

.....

.....

.....

3. กำหนดเลขโดดคือ 0, 2, 4, 7, 9 นำมาสร้างเลขคู่สามหลัก โดยแต่ละหลักห้ามใช้เลขซ้ำกันได้กี่วิธี

.....

.....

.....

4. มีดอกไม้ 7 ชนิดที่แตกต่างกัน ต้องการนำมาจัดแจกันที่ละ 3 ชนิด จะสามารถจัดได้กี่แบบ

.....

.....

.....

5. มีดอกไม้ 7 ชนิดที่แตกต่างกันนำมาร้อยเป็นพวงมาลัยจะได้กี่วิธี

.....

.....

.....

6. มีต้นไม้ 7 ชนิด นำมาปลูกเรียงหน้าเสาธงเป็นแนวตรงได้กี่วิธี

.....

.....

.....

7. มีดอกไม้ 7 ชนิด นำมาเรียงบนโต๊ะเป็นแนวตรงทีละ 3 ชนิดได้กี่วิธี

.....  
.....  
.....

8. มีดอกไม้ 7 ชนิดนำมาประดับบนรอบนาฬิการูปวงกลมจะจัดได้กี่วิธี

.....  
.....  
.....

9. จากคำว่า FOOTBALL นำอักษรจากคำนี้มาจัดเรียงใหม่โดยไม่คำนึงถึงความหมายจะจัดได้กี่วิธี

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

10. มีวิธีเลือกอักษร 3 ตัวจากคำว่า FOOTBALL ได้กี่วิธี

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



เรื่อง โจทย์ระคน

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนแสดงวิธีทำ

1. มีอาหารคาว 5 ชนิด อาหารหวาน 3 ชนิด และน้ำดื่ม 4 ชนิด ให้เลือกมารับประทานอาหารอย่างละ 1 ชนิด จะมีรายการอาหารคาว อาหารหวาน และน้ำดื่ม แตกต่างกันได้กี่แบบ

**แนวคำตอบ:** จำนวนวิธีเลือกจัดอาหารได้แตกต่างกัน เท่ากับ  $5 \times 3 \times 4 = 60$  วิธี

2. นักเรียนต้องการเดินทางจังหวัดลำปางโดยออกจากกรุงเทพฯ ไปยังอยุธยาได้ 3 เส้นทางและจากอยุธยาไปยังลำปางได้ 4 เส้นทาง จะสามารถเดินทางไปและกลับได้โดยไม่ใช้เส้นทางเดิมได้กี่วิธี

**แนวคำตอบ:** จำนวนวิธีเดินทางไปและกลับได้โดยไม่ใช้เส้นทางเดิม เท่ากับ  $4 \times 3 \times 3 \times 2 = 72$  วิธี

3. กำหนดเลขโดดคือ 0, 2, 4, 7, 9 นำมาสร้างเลขคู่สามหลัก โดยแต่ละหลักห้ามใช้เลขซ้ำกันได้กี่วิธี

**แนวคำตอบ:** สร้างเลขคู่จากเลขโดด 5 ตัว

**กรณี 1** เลขหลักหน่วยเป็นเลข 0

ขั้นตอนที่ 1 เลือกตัวเลขในหลักหน่วยได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกตัวเลขในหลักร้อยได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกตัวเลขในหลักสิบได้ 3 วิธี

ดังนั้น จะได้จำนวนวิธีเท่ากับ  $1 \times 4 \times 3 = 12$  วิธี

**กรณี 2** เลขหลักหน่วยเป็นเลข 2 หรือ 4

ขั้นตอนที่ 1 เลือกตัวเลขในหลักหน่วยได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกตัวเลขในหลักร้อยได้ 3 วิธี (0 อยู่ในหลักร้อยไม่ได้ จึงเหลือเลขอยู่ 3 ตัว)

ขั้นตอนที่ 3 เลือกตัวเลขในหลักสิบได้ 3 วิธี (จากเลขโดด 5 ตัว ใช้ไปแล้ว 2 ตัว)

ดังนั้น จะได้จำนวนวิธีเท่ากับ  $2 \times 3 \times 3 = 18$  วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ  $12 + 18 = 30$  วิธี

4. มีดอกไม้ 7 ชนิดที่แตกต่างกัน ต้องการนำมาจัดแจกันที่ละ 3 ชนิด จะสามารถจัดได้กี่แบบ

**แนวคำตอบ:**

$$\frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4! 3!}$$

$$= 7 \times 5$$

$$= 35 \text{ วิธี}$$

5. มีดอกไม้ 7 ชนิดที่แตกต่างกันนำมาร้อยเป็นพวงมาลัยจะได้กี่วิธี

**แนวคำตอบ:** เนื่องจากการร้อยพวงมาลัยเป็นการจัดแบบวงกลม 3 มิติ

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น จำนวนวิธีเท่ากับ} \quad & \frac{(7-1)}{2} = \frac{6!}{2} \\ & = \frac{720!}{2} \\ & = 360 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

6. มีต้นไม้ 7 ชนิด นำมาปลูกเรียงหน้าเสาธงเป็นแนวตรงได้กี่วิธี

**แนวคำตอบ:** จำนวนวิธีนำต้นไม้มาปลูกเรียงหน้าเสาธงเป็นแนวตรงได้เท่ากับ  $7! = 5,040$  วิธี

7. มีดอกไม้ 7 ชนิด นำมาเรียงบนโต๊ะเป็นแนวตรงที่ละ 3 ชนิดได้กี่วิธี

$$\begin{aligned} \text{แนวคำตอบ: จำนวนวิธีนำดอกไม้มาเรียงบนโต๊ะเป็นแนวตรงได้เท่ากับ} \quad & P_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!3!} \\ & = \frac{7!}{4!} \\ & = 7 \times 6 \times 5 \\ & = 210 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

8. มีดอกไม้ 7 ชนิดนำมาประดับรอบนาฬิการูปวงกลมจะจัดได้กี่วิธี

$$\begin{aligned} \text{แนวคำตอบ: จำนวนวิธีนำดอกไม้มาเรียงเป็นวงกลม 2 มิติได้เท่ากับ} \quad & (7 - 1)! = 6! \\ & = 720 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

9. จากคำว่า FOOTBALL นำอักษรจากคำนี้มาจัดเรียงใหม่โดยไม่คำนึงถึงความหมายจะจัดได้กี่วิธี

**แนวคำตอบ:** มีอักษรทั้งหมด 8 ตัว

มี O ซ้ำกัน 2 ตัว และมี L ซ้ำกัน 2 ตัว

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น จะจัดเรียงคำใหม่โดยไม่คำนึงถึงความหมายได้} \quad & \frac{8!}{2!2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{2} \\ & = 10,080 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

10. มีวิธีเลือกอักษร 3 ตัวจากคำว่า FOOTBALL ได้กี่วิธี

แนวคำตอบ: กรณีที่ 1 เลือกอักษรมา 3 ตัวที่แตกต่างกันจากอักษรทั้งหมด 6 ตัว (F, O, T, B, A, L)

$$\begin{aligned} \dots\dots\dots \text{จะได้} \dots\dots \binom{6}{3} &= \dots\dots \frac{6!}{(6-3)!3!} \\ \dots\dots\dots &= \dots\dots \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} \\ \dots\dots\dots &= \dots\dots 20 \dots\dots \text{วิธี} \dots\dots\dots \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 เลือกอักษรจากอักษรที่มีซ้ำกัน 2 ตัว มี 2 แบบ (O และ L) แต่เลือกได้ 1 แบบจะได้เป็น  $\binom{2}{1}$  วิธี  
จึงเหลืออักษรที่แตกต่างกันอีก 5 แบบแล้วเลือกมาอีก 1 ตัว จะได้เป็น  $\binom{5}{1}$  วิธี.....  
ดังนั้นจะเลือกอักษรมาสร้างได้  $\binom{2}{1}\binom{5}{1} = 10$  วิธี.....  
ดังนั้น จำนวนวิธีในการเลือกตัวอักษรทั้งหมด เท่ากับ  $20 + 10 = 30$  วิธี.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

จำนวน 30 ชั่วโมง

เรื่อง ทฤษฎีบททวินาม

จำนวน 4 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

ผลการเรียนรู้

เข้าใจและใช้หลักการบวกและการคูณ การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดหมู่ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) หาสัมประสิทธิ์ทวินามได้ (K)
- 2) ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบททวินามในการแก้ปัญหาได้ (P)
- 3) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ทฤษฎีบททวินาม

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

ทฤษฎีบท

ถ้า  $a, b$  เป็นจำนวนจริงใดๆ และ  $n, r$  เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

เรียก  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{r}, \dots, \binom{n}{n}$  ว่า สัมประสิทธิ์ทวินาม

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร	1. มีวินัย
2. ความสามารถในการคิด	2. ใฝ่เรียนรู้
1) ทักษะการคิดคล่อง	3. มุ่งมั่นในการทำงาน
2) ทักษะกระบวนการคิด	
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	



ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นการใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

1. ครูให้นักเรียนหาการกระจายของพหุนาม 2 พจน์ ยกกำลัง  $n$  เมื่อ  $n$  เท่ากับ 2, 3 และ 4 ดังนี้

1) จงหาผลลัพธ์ของ  $(a + b)^2$ ,  $(a + b)^3$ ,  $(a + b)^4$ ,  $(a - b)^2$ ,  $(a - b)^3$  และ  $(a - b)^4$

2. ครูให้นักเรียนแสดงวิธีการหาผลลัพธ์ควบคู่ไปกับการหาคำตอบ

(แนวคำตอบ:  $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b)$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b)$$

$$= (a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a + b)^4 = (a + b)^3(a + b)$$

$$= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a + b)$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a - b)^4 = (a - b)^3(a - b)$$

$$= (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)(a - b)$$

$$= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูให้นักเรียนสังเกตว่าถ้าเรานำพหุนาม 2 พจน์ดีกรีหนึ่งมายกกำลังสองจะได้พหุนามดีกรีสองมี 3 พจน์ ถ้ายกกำลังสาม จะได้พหุนามดีกรีสามมี 4 พจน์ ถ้ายกกำลังสี่ จะได้พหุนามดีกรีสี่มี 5 พจน์ และดีกรีแต่ละพจน์

จะลดลงทีละ 1 เช่น  $(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$  หรือ  $(1 + b)^3 = 1 + 3b + 3b^2 + b^3$

2. ครูให้นักเรียนสังเกตผลลัพธ์ของสูตร  $C_{n,r}$  ตามลำดับที่ได้เรียนไปแล้วในใบงานที่ 2.6.1 เช่น

$$1) \binom{2}{0} = 1, \quad \binom{2}{1} = 2, \quad \binom{2}{2} = 1$$

$$2) \binom{3}{0} = 1, \quad \binom{3}{1} = 3, \quad \binom{3}{2} = 3, \quad \binom{3}{3} = 1$$

3. จากนั้นครูให้นักเรียนสังเกตผลลัพธ์ที่ได้จากข้อความรู้ทั้งสองนำมาประยุกต์ใช้กับการกระจายพหุนาม

2 พจน์ เช่น  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$= \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

หรือ  $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$$= \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4$$

เป็นการนำผลลัพธ์จากการกระจายมาเขียนสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ให้สัมพันธ์กับการหาจำนวน

จากสูตร  $\binom{n}{r}$  โดยการพิจารณาดังกล่าว เรียกว่า ทฤษฎีบททวินาม ดังนี้

ถ้า  $a, b$  เป็นจำนวนจริงใดๆ และ  $n, r$  เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

4. ครูให้นักเรียนสังเกตค่า  $n, r$  ในสูตร  $\binom{n}{r}$  และเลขชี้กำลังของพหุนามตัวหน้าและตัวหลังของแต่ละพจน์

$$\text{ดังนี้ (พจน์หน้า + พจน์หลัง)}^n = \binom{n}{0}(\text{พจน์หน้า})^n + \binom{n}{1}(\text{พจน์หน้า})^{n-1}(\text{พจน์หลัง})^1 +$$

$$\binom{n}{2}(\text{พจน์หน้า})^{n-2}(\text{พจน์หลัง})^2 + \dots + \binom{n}{n-1}(\text{พจน์หน้า})^1(\text{พจน์หลัง})^{n-1} + \binom{n}{n}(\text{พจน์หลัง})^n$$

5. ครูยกตัวอย่างให้นักเรียนพิจารณา 1 พจน์ เช่น พจน์ที่สาม =  $\binom{n}{2}(\text{พจน์หน้า})^{n-2}(\text{พจน์หลัง})^2$

จะมีรูปพจน์ ที่สามว่า  $T_{2+1} = \binom{n}{2}(\text{พจน์หน้า})^{n-2}(\text{พจน์หลัง})^2$  หรือ  $T_{r+1} = \binom{n}{r}(\text{พจน์หน้า})^{n-r}(\text{พจน์หลัง})^r$

เรียก  $T_{r+1}$  ว่าพจน์ที่  $r + 1$  เรียก  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{r}, \dots, \binom{n}{n}$  ว่า สัมประสิทธิ์ทวินาม

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

6. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น จากนั้นครูสุ่มเรียกนักเรียนให้บอกคำตอบ โดยครูเขียนเฉลยบนกระดาน

### ชั่วโมงที่ 2

### ขั้นรู้ (Knowing)

7. ครูให้นักเรียนหาการกระจายโดยใช้ทฤษฎีบททวินาม จงหา

1)  $(2x + 3)^6$

(แนวคำตอบ:  $(2x + 3)^6 = \binom{6}{0}(2x)^6 + \binom{6}{1}(2x)^5(3) + \binom{6}{2}(2x)^4(3)^2 + \binom{6}{3}(2x)^3(3)^3 + \binom{6}{4}(2x)^2(3)^4 + \binom{6}{5}(2x)(3)^5 + \binom{6}{6}3^6$   
 $= (1)(2x)^6 + (6)(2x)^5(3) + (15)(2x)^4(3)^2 + (20)(2x)^3(3)^3 + (15)(2x)^2(3)^4 + (6)(2x)(3)^5 + (1)3^6$   
 $= 64x^6 + 576x^5 + 2,160x^4 + 4,320x^3 + 4,860x^2 + 2,916x + 729$ )

2)  $(3a - 2b)^5$

(แนวคำตอบ:  $(3a - 2b)^5 = \binom{5}{0}(3a)^5 + \binom{5}{1}(3a)^4(-2b) + \binom{5}{2}(3a)^3(-2b)^2 + \binom{5}{3}(3a)^2(-2b)^3 + \binom{5}{4}(3a)(-2b)^4 + \binom{5}{5}(-2b)^5$   
 $= (1)(3a)^5 + (5)(3a)^4(-2b) + (10)(3a)^3(-2b)^2 + (10)(3a)^2(-2b)^3 + (5)(3a)(-2b)^4 + (1)(-2b)^5$   
 $= 3a^5 - 810a^4b + 1,080a^3b^2 - 720a^2b^3 + 240ab^4 - 32b^5$ )

3)  $\left(x^2 - \frac{2}{x^2}\right)^5$

(แนวคำตอบ:  $\left(x^2 - \frac{2}{x^2}\right)^5 = (x^2 - 2x^{-2})^5$   
 $= \binom{5}{0}(x^2)^5 + \binom{5}{1}(x^2)^4(-2x^{-2}) + \binom{5}{2}(x^2)^3(-2x^{-2})^2 + \binom{5}{3}(x^2)^2(-2x^{-2})^3 + \binom{5}{4}(x^2)(-2x^{-2})^4 + \binom{5}{5}(-2x^{-2})^5$   
 $= (1)(x^2)^5 + (5)(x^2)^4(-2x^{-2}) + (10)(x^2)^3(-2x^{-2})^2 + (10)(x^2)^2(-2x^{-2})^3 + (5)(x^2)(-2x^{-2})^4 + (1)(-2x^{-2})^5$   
 $= x^{10} - 10x^6 + 40x^2 - 80x^{-2} + 80x^{-6} - 32x^{-10}$ )

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

8. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น จากนั้นนักเรียนและครูร่วมกันเฉลยคำตอบ

9. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 2.4 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น ข้อ 1 จากนั้นครูสุ่มนักเรียนให้ออกมาเขียนวิธีทำบนกระดาน

### ชั่วโมงที่ 3

### ขั้นรู้ (Knowing)

10. ครูให้นักเรียนฝึกใช้สูตร  $T_{r+1}$  จากโจทย์ต่อไปนี้

- จากการกระจาย  $\left(2x^2 - \frac{3}{x^2}\right)^6$  จงหา

1.1) พจน์ที่ 4

1.2) พจน์ที่มี  $x^4$

(แนวคำตอบ: 1.1) พจน์ที่ 4 คือ  $T_4 = T_{3+1}$

ดังนั้น  $r = 3$

จากโจทย์  $\left(2x^2 - \frac{3}{x^2}\right)^6$  จะได้ว่า  $n = 6$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad T_4 &= T_{3+1} \\ &= \binom{6}{0} (2x^2)^3 (-3x^{-2})^3 \\ &= \frac{6!}{0!} (8x^6) (-27x^{-6}) \\ &= (5 \times 4)(8)(-27) \\ &= -4,320 \end{aligned}$$

1.2) พจน์ที่มี  $x^4$

$$\begin{aligned} \text{จากสูตร } T_{r+1} &= \binom{n}{r} (\text{หน้า})^{n-r} (\text{หลัง})^r \\ T_{r+1} &= \binom{6}{r} (2x^2)^{6-r} (-3x^{-2})^r \\ &= \binom{6}{r} (2)^{6-r} (x^{12-2r}) (-3)^r (x^{-2r}) \\ &= \binom{6}{r} (2)^{6-r} (-3)^r (x^{12-4r}) \end{aligned}$$

เราต้องการพจน์ที่มี  $x^4$  จึงนำไปเทียบกับพจน์  $x$  ที่หาได้จากสูตร

$$\text{จะได้ว่า } x^4 = x^{12-4r}$$

$$\text{พิจารณา } 4 = 12 - 4r$$

$$\text{นั่นคือ } r = 2$$

ดังนั้น พจน์ที่มี  $x^4$  คือพจน์ที่ 3 ( $T_{r+1} = T_3$ )



11. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 38 – 39 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น พร้อมทั้งอธิบายอย่างละเอียด

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

12. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น เพื่อตรวจสอบความเข้าใจในการทำสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่าง ๆ

13. ครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 41 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้นในการนำทฤษฎีบททวินามไปใช้ในหารแก้ปัญหาการคำนวณเลขยกกำลังของจำนวนในรูปทศนิยม

14. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น เป็นรายบุคคลเพื่อตรวจสอบความเข้าใจ

### ชั่วโมงที่ 4

### ขั้นรู้ (Knowing)

15. ครูถามนักเรียนว่าจำนวนพจน์ที่ได้จากการใช้ทฤษฎีบททวินาม เช่น

การกระจาย  $(a + b)^3$  จะได้พหุนาม 4 พจน์

การกระจาย  $(a + b)^4$  จะได้พหุนาม 5 พจน์

การกระจาย  $(a + b)^n$  จะได้พหุนาม  $n + 1$  พจน์

จากความรู้เรื่องจำนวนพจน์เช่นนี้ เราสามารถพิจารณาพจน์ต่าง ๆ ของการกระจายได้ดังนี้

ถ้า  $n$  เป็นจำนวนคู่ พจน์กลางของการกระจายจะมี 1 พจน์ คือ

พจน์ที่  $\frac{n+1}{2}$  ถ้า  $n$  เป็นจำนวนคี่ พจน์กลางของการกระจายจะมี 2 พจน์

16. ครูยกตัวอย่างที่ให้หาสัมประสิทธิ์ทวินามและสัมประสิทธิ์ของพจน์กลางของการกระจายพหุนามต่อไปนี้

1)  $(x^3 - 2)^5$

2)  $(x^3 - 2)^6$

(แนวคำตอบ:

1)  $(x^3 - 2)^5$

เนื่องจาก  $n = 5$  จะมีจำนวนพจน์ที่กระจายได้ 6 พจน์ พจน์กลางจึงเป็นพจน์ที่ 3

และพจน์ที่ 4 นั่นคือ  $r = 2, 3$

$$\begin{aligned} \text{จากสูตร} \quad T_3 &= T_{2+1} \\ &= \binom{5}{2} ((x^3)^{5-2} (-2)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของพจน์กลาง คือ  $\binom{5}{2} (= 10)$

$$\text{และสัมประสิทธิ์ทวินาม } \binom{5}{2}((-2)^2 = 40$$

$$\begin{aligned} \text{จาก } T_4 &= T_{3+1} \\ &= \binom{5}{3}(x^3)^{5-3}(-2)^3 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของพจน์กลาง คือ } \binom{5}{3} = 10$$

$$\text{และสัมประสิทธิ์ทวินาม } \binom{5}{3}(-2)^3 = -80$$

$$2) (x^3 - 2)^6$$

เนื่องจาก  $n = 6$  จะมีจำนวนพจน์ที่กระจายได้ 7 พจน์ พจน์กลางจึงเป็นพจน์ที่ 4 นั่นคือ  $r = 3$

$$\begin{aligned} \text{จากสูตร } T_4 &= T_{3+1} \\ &= \binom{6}{3}(x^3)^{6-3}(-2)^3 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของพจน์กลาง คือ } \binom{6}{3} = 20$$

$$\text{และสัมประสิทธิ์ทวินาม } \binom{6}{3}(-2)^3 = -160$$

### ขั้นเข้าใจ (Understanding)

17. ครุยกตัวอย่างให้หาพจน์ที่ไม่มี  $x$  จากการกระจาย  $(x - 3y)^5$

(แนวคำตอบ: เนื่องจาก  $n = 5$  พจน์หน้าคือ  $x$  และพจน์หลังคือ  $-3y$ )

$$\text{จากสูตร } T_{r+1} = \binom{5}{r} (x)^{5-r}(-3y)^r$$

โจทย์ต้องการพจน์ที่ไม่มี  $x$  นั่นคือ  $x^0$  จึงนำไปเทียบกับพจน์  $x$  ที่ได้จากสูตร

$$\text{จะได้ } x^{5-r} = x^0$$

$$\text{พิจารณา } 5 - r = 0$$

$$r = 5$$

ดังนั้น พจน์ที่ไม่มี  $x$  คือพจน์ที่ 6 นั่นเอง)

18. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 2.4 ข้อ 6 และ 7 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น เพื่อตรวจสอบความเข้าใจ

### ขั้นลงมือทำ (Doing)

19. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 4 – 5 คน จากนั้นให้แต่ละกลุ่มศึกษา “คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง” ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น แล้วร่วมกันอภิปรายถึงสถานการณ์ที่กำหนด และเขียนแสดงวิธีทำลงในกระดาษ A4 แล้วส่งตัวแทนออกมานำเสนอหน้าชั้นเรียน โดยครูตรวจสอบความถูกต้อง

20. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น เป็นการบ้าน

21. นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น

## ขั้นสรุป

1. ครูให้นักเรียนช่วยกันบอกสูตรของทฤษฎีบทพีทาโกรัส จากนั้นให้นักเรียนจดบันทึกลงในสมุด
2. ครูให้นักเรียนสร้างชิ้นงาน เรื่อง หลักการนับเบื้องต้น โดยให้นักเรียนสร้างชิ้นงานตามความคิดสร้างสรรค์ของตนเอง โดยในชิ้นงานนั้นจะต้องมีเนื้อหาของเรื่องหลักการนับเบื้องต้น และมีโจทย์แบบฝึกหัด

### การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่าง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) ทฤษฎีบทพีทาโกรัส	- ตรวจสอบใบงานที่ 2.8.1 - ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ 2.4	- ใบงานที่ 2.8 - แบบฝึกทักษะ 2.4	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) นำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน	- แบบประเมินการ นำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการ ทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการ ทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงาน กลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการ ทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการ ทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่น ในการทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

### สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

#### สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น
- 3) ใบงานที่ 2.8.1 เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

#### แหล่งการเรียนรู้

-

ใบงานที่ 2.8.1

เรื่อง ทฤษฎีบททวินาม

---

คำชี้แจง : ให้นักเรียนตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

1)  $(2x + 3)^6$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

2)  $(3a - 2b)^5$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

3)  $\left(x^2 - \frac{2}{x^2}\right)^5$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

เรื่อง ทฤษฎีบททวินาม

คำชี้แจง : ให้นักเรียนตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

1)  $(2x + 3)^6$

แนวคำตอบ  $(2x + 3)^6 = \binom{6}{0} (2x)^6 + \binom{6}{1} (2x)^5 (3) + \binom{6}{2} (2x)^4 (3)^2 + \binom{6}{3} (2x)^3 (3)^3 +$

$$\binom{6}{4} (2x)^2 (3)^4 + \binom{6}{5} (2x) (3)^5 + \binom{6}{6} 3^6$$

$$= (1)(2x)^6 + (6)(2x)^5 (3) + (15)(2x)^4 (3)^2 + (20)(2x)^3 (3)^3 + (15)(2x)^2 (3)^4 + (6)(2x) (3)^5 + (1)3^6$$

$$= 64x^6 + 576x^5 + 2,160x^4 + 4,320x^3 + 4,860x^2 + 2,916x + 729$$

2)  $(3a - 2b)^5$

แนวคำตอบ  $(3a - 2b)^5 = \binom{5}{0} (3a)^5 + \binom{5}{1} (3a)^4 (-2b) + \binom{5}{2} (3a)^3 (-2b)^2 + \binom{5}{3} (3a)^2 (-2b)^3$

$$+ \binom{5}{4} (3a) (-2b)^4 + \binom{5}{5} (-2b)^5$$

$$= (1)(3a)^5 + (5)(3a)^4 (-2b) + (10)(3a)^3 (-2b)^2 + (10)(3a)^2 (-2b)^3 + (5)(3a) (-2b)^4 + (1)(-2b)^5$$

$$= 3a^5 - 810a^4b + 1,080a^3b^2 - 720a^2b^3 + 240ab^4 - 32b^5$$

3)  $\left(x^2 - \frac{2}{x^2}\right)^5$

แนวคำตอบ  $\left(x^2 - \frac{2}{x^2}\right)^5 = (x^2 - 2x^{-2})^5$

$$= \binom{5}{0} (x^2)^5 + \binom{5}{1} (x^2)^4 (-2x^{-2}) + \binom{5}{2} (x^2)^3 (-2x^{-2})^2 + \binom{5}{3} (x^2)^2 (-2x^{-2})^3$$

$$+ \binom{5}{4} (x^2) (-2x^{-2})^4 + \binom{5}{5} (-2x^{-2})^5$$

$$= (1) (x^2)^5 + (5) (x^2)^4 (-2x^{-2}) + (10) (x^2)^3 (-2x^{-2})^2 + (10) (x^2)^2 (-2x^{-2})^3 + (5) (x^2) (-2x^{-2})^4 + (1) (-2x^{-2})^5$$

$$= x^{10} - 10x^6 + 40x^2 - 80x^{-2} + 80x^{-6} - 32x^{-10}$$

## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง ความน่าจะเป็น

จำนวน 19 ชั่วโมง

เรื่อง การทดลองสุ่มและเหตุการณ์

จำนวน 6 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

### ผลการเรียนรู้

หาความน่าจะเป็นและนำความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นไปใช้

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกผลลัพธ์ที่เกิดจากการทดลองสุ่ม แซมเปิลสเปซและเหตุการณ์ได้ (K)
2. เขียนวิธีหาค่าตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการทดลองสุ่ม แซมเปิลสเปซและเหตุการณ์ได้ (P)
3. ตั้งใจเรียนรู้และแสวงหาความรู้ รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

### สาระการเรียนรู้

การทดลองสุ่มและเหตุการณ์

### สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

การทดลองสุ่ม คือ การทดลองหรือการกระทำใด ๆ ซึ่งทราบว่าจะเกิดผลลัพธ์อะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถบอกได้อย่างถูกต้องแน่นอนว่าในแต่ละครั้งที่ทดลองผลที่เกิดขึ้นจะเป็นอะไรในบรรดาผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้เหล่านั้น

ปริภูมิตัวอย่าง คือ เซตของผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม

เหตุการณ์ คือ สับเซตของปริภูมิตัวอย่าง

### สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร	1. มีวินัย
2. ความสามารถในการคิด	2. ใฝ่เรียนรู้
1) ทักษะการสังเกต	3. มุ่งมั่นในการทำงาน
2) ทักษะการระบุ	
3) ทักษะการวิเคราะห์	
4) ทักษะการคิดคล่อง	
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	
4. ความสามารถในการใช้ทักษะชีวิต	
5. ความสามารถในการใช้เทคโนโลยี	

## กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : แบบ Concept Based Teaching

### ชั่วโมงที่ 1

#### ขั้นนำ

##### ขั้นที่ 1 การใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

1. นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น
2. ครูกระตุ้นความสนใจของนักเรียน โดยให้นักเรียนดูภาพและข้อความหน้าหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็นในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น
3. จากนั้นครูถามคำถามประจำหน่วยการเรียนรู้ว่า “นักเรียนคิดว่านิธิต กล่าวถูกต้องหรือไม่ เพราะเหตุใด” แล้วให้นักเรียนร่วมกันแสดงความคิดเห็น
4. นักเรียนศึกษากิจกรรมควรรู้ก่อนเรียน ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

#### ขั้นสอน

##### ขั้นที่ 2 รู้ (Knowing)

1. ครูถามคำถามกับนักเรียนว่า “เหตุการณ์ทุกเหตุการณ์สามารถหาความน่าจะเป็นได้ทุกเหตุการณ์หรือไม่”

(แนวคำตอบ: ไม่ได้)

2. ครูให้นักเรียนพิจารณาเหตุการณ์ต่อไปนี้
  - ในกล่องใส่ใบหนึ่งใส่ปากกามีปากกาสีแดงเหมือนกันทั้งหมด 10 ด้าม จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบปากกา 1 ด้าม
  - นายแดงกำลังจะไปทานอาหารกลางวัน จงหาความน่าจะเป็นที่นายแดงจะเลือกทานข้าวผัดปู
3. จากนั้นครูถามคำถามกับนักเรียนว่า “เหตุการณ์ในข้อใดสามารถหาความน่าจะเป็นได้และเหตุการณ์ในข้อใดไม่สามารถหาความน่าจะเป็นได้”

(แนวคำตอบ : ทั้ง 2 ข้อไม่สามารถหาความน่าจะเป็นได้เพราะ

- ข้อที่ 1) เราทราบอยู่แล้วว่าในกล่องมีอะไร เพราะเป็นกล่องใส่และยังทราบอีกว่าเป็นสีแดงทุกด้ามเหมือนกันหมด
- ข้อที่ 2) ไม่สามารถหาความน่าจะเป็นได้เพราะ ไม่ทราบว่านายแดงมีตัวเลือกทั้งหมดเป็นอาหารชนิดใดบ้าง นั่นคือ ไม่สามารถรู้ ผลลัพธ์ทั้งหมดหรือแซมเปิลสเปซ)

4. ครูกล่าวขมนักเรียนว่า “ถูกต้องแล้ว เพราะไม่ใช่ทุกเหตุการณ์ที่จะหาความน่าจะเป็นได้ทั้งหมด”

5. ครูกล่าวกับนักเรียนว่า “เหตุการณ์ที่จะหาความน่าจะเป็นได้ต้องเป็นเหตุการณ์หรือการทดลองที่เราทราบผลลัพธ์อาจจะเป็นอะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถบอกได้อย่างถูกต้องแน่นอนว่าจะเป็นอะไร และเราเรียกเหตุการณ์ที่สามารถหาความน่าจะเป็นได้เช่นนี้ว่า การทดลองสุ่ม”

6. นักเรียนศึกษาความรู้เกี่ยวกับบทนิยามการทดลองสุ่ม ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

7. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปว่า “การทดลองสุ่มคือ การทดลองหรือการกระทำใด ๆ ซึ่งทราบผลลัพธ์อาจจะเป็นอะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถบอกได้อย่างถูกต้องแน่นอนว่าในแต่ละครั้งที่ทดลองผลที่เกิดขึ้นจะเป็นอะไร ในบรรดาผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้เหล่านั้น”

8. นักเรียนทำใบงานที่ 3.1.1 เรื่อง การทดลองสุ่ม

## ชั่วโมงที่ 2

### ขั้นที่ 3 เข้าใจ (Understanding)

9. ครูกล่าวว่า “เหตุการณ์ที่หาความน่าจะเป็นได้ต้องมีการทดลองสุ่ม เพราะเราสามารถหาผลลัพธ์ของเหตุการณ์หรือปริภูมิตัวอย่างได้”

10. นักเรียนศึกษาบทนิยามปริภูมิตัวอย่างและตัวอย่างที่ 1 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

11. นักเรียนและครูร่วมกันสรุปว่า “ปริภูมิตัวอย่าง คือ เซตของผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม”

12. นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

13. นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 2 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

14. นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

15. นักเรียนและครูร่วมกันสรุปว่า “เหตุการณ์ คือ สับเซตของปริภูมิตัวอย่าง”

## ชั่วโมงที่ 3

### ขั้นที่ 3 เข้าใจ (Understanding)

16. นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 3 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น



17. นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2  
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

18. นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 4 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3  
ความน่าจะเป็น

19. นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2  
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

#### ชั่วโมงที่ 4

20. นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 5 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2  
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

21. นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2  
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

22. นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 6 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2  
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

23. นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2  
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

#### ชั่วโมงที่ 5

##### ชั้นที่ 4 ลงมือทำ (Doing)

24. ครูให้นักเรียนฝึกเขียนปริภูมิตัวอย่างจากเหตุการณ์ทดลองสุ่มบนกระดาน ดังต่อไปนี้

1) การทอดลูกเต๋า 1 ลูก

(แนวคำตอบ :  $S = \{ 1,2,3,4,5,6\}$ )

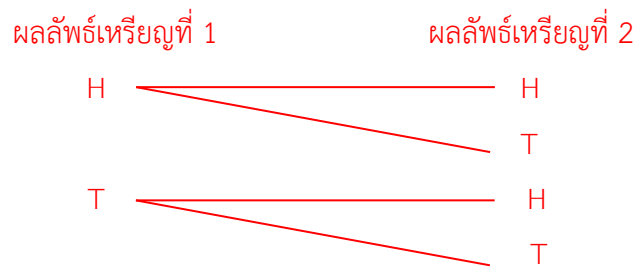
2) การทอดลูกเต๋า 2 ลูก พร้อมกัน

(แนวคำตอบ :  $S = \{ (1,1) , (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (1,6) , (2,1) , (2,2) , (2,3) , (2,4) , (2,5) , (2,6) , (3,1) , (3,2) , (3,3) , (3,4) , (3,5) , (3,6) , (4,1) , (4,2) , (4,3) , (4,4) , (4,5) , (4,6) , (5,1) , (5,2) , (5,3) , (5,4) , (5,5) , (5,6) , (6,1) , (6,2) , (6,3) , (6,4) , (6,5) , (6,6) \}$ )

3) การโยนเหรียญ 2 เหรียญพร้อมกัน 1 ครั้ง

(แนวคำตอบ: เราสามารถหาปริภูมิตัวอย่างที่มีการทำงานหลายขั้นตอนทั้งหมดที่เห็นภาพชัดเจนได้  
โดยการเขียนแผนภาพต้นไม้ ได้ดังนี้

กำหนดให้ H แทนเหรียญออกหัว T แทนเหรียญออกก้อย



$$S = \{ HH , HT , TH , TT \}$$

4) การโยนเหรียญ 1 เหรียญ 3 ครั้ง

(แนวคำตอบ :  $S = \{ HHH , HHT , HTH , HTT , THH , THT , TTH , TTT \}$ )

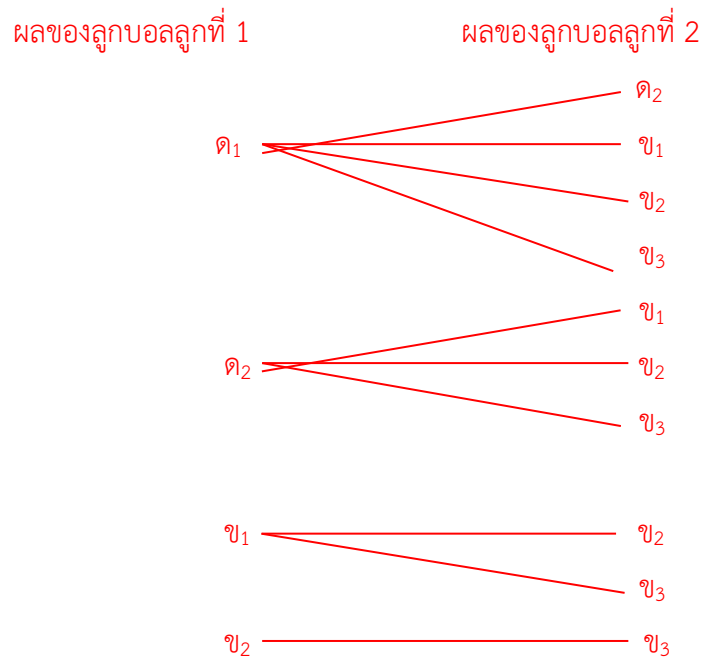
5) กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 2 ลูก และสีขาว 3 ลูก หยิบลูกบอล 2 ลูก โดยมีเงื่อนไขดังนี้

กำหนดให้ ลูกบอลสีแดง 2 ลูก เขียนแทนด้วย  $d_1$  และ  $d_2$

ลูกบอลสีขาว 3 ลูก เขียนแทนด้วย  $x_1$   $x_2$  และ  $x_3$

5.1) หยิบพร้อมกัน

(แนวคำตอบ : การหยิบ 2 ลูกพร้อมกัน หมายถึง การหยิบสิ่งของขึ้นมาโดยผลไม่มีการเรียงลำดับ หรือเป็นการจัดหมู่ แสดงได้ด้วยแผนภาพต้นไม้ ดังนี้



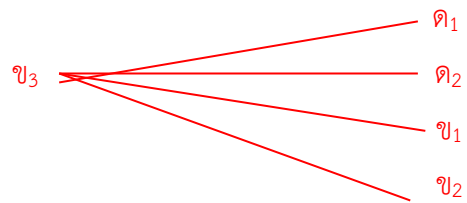
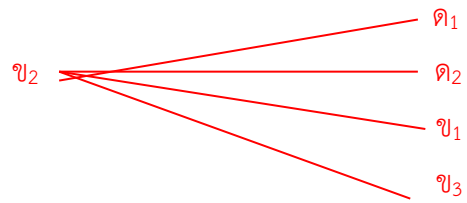
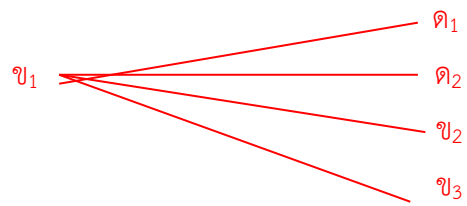
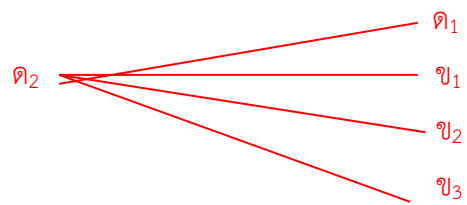
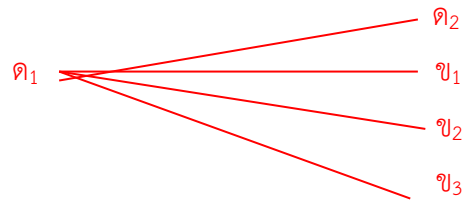
$$S = \{ d_1d_2 , d_1x_1 , d_1x_2 , d_1x_3 , d_2x_1 , d_2x_2 , d_2x_3 , x_1x_2 , x_1x_3 , x_2x_3 \}$$

## 5.2) หยิบทีละลูก

(แนวคำตอบ : การหยิบทีละลูก หมายถึง การหยิบสิ่งของทีหยิบขึ้นมามีผลตามการเรียงลำดับ เขียนปริภูมิตัวอย่างแสดงด้วยแผนภาพต้นไม้ ดังนี้

ผลของลูกบอลลูกที่ 1

ผลของลูกบอลลูกที่ 2



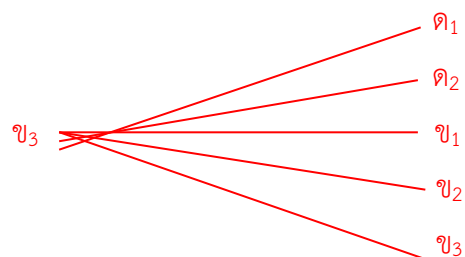
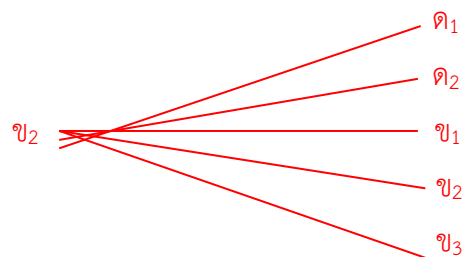
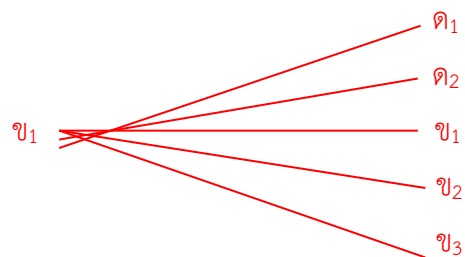
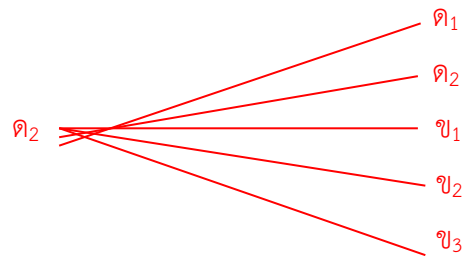
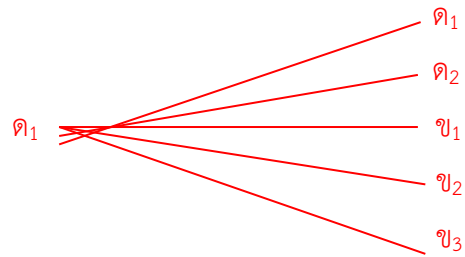
$$S = \{ D_1D_2, D_1B_1, D_1B_2, D_1B_3, D_2D_1, D_2B_1, D_2B_2, D_2B_3, B_1D_1, B_1D_2, B_1B_2, B_1B_3, B_2D_1, B_2D_2, B_2B_1, B_2B_3, B_3D_1, B_3D_2, B_3B_1, B_3B_2 \}$$

5.3) หยิบทีละลูกแล้วใส่คืน

(แนวคำตอบ : การหยิบทีละลูกแล้วใส่คืน หมายถึง เมื่อสุ่มหยิบลูกแก้วขึ้นมาแล้วใส่คืน  
 ดังนั้น การหยิบลูกที่สองจึงหยิบลูกที่ถูกหยิบไปแล้วครั้งที่ 1 ได้อีกด้วย แสดงได้ดังนี้

ผลของลูกบอลลูกที่ 1

ผลของลูกบอลลูกที่ 2



$$S = \{ \text{ด}_1\text{ด}_1, \text{ด}_1\text{ด}_2, \text{ด}_1\text{ข}_1, \text{ด}_1\text{ข}_2, \text{ด}_1\text{ข}_3, \text{ด}_2\text{ด}_1, \text{ด}_2\text{ด}_2, \text{ด}_2\text{ข}_1, \text{ด}_2\text{ข}_2, \text{ด}_2\text{ข}_3, \text{ข}_1\text{ด}_1, \text{ข}_1\text{ด}_2, \text{ข}_1\text{ข}_1, \text{ข}_1\text{ข}_2, \text{ข}_1\text{ข}_3, \text{ข}_2\text{ด}_1, \text{ข}_2\text{ด}_2, \text{ข}_2\text{ข}_1, \text{ข}_2\text{ข}_2, \text{ข}_2\text{ข}_3, \text{ข}_3\text{ด}_1, \text{ข}_3\text{ด}_2, \text{ข}_3\text{ข}_1, \text{ข}_3\text{ข}_2, \text{ข}_3\text{ข}_3 \}$$

25. นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

### ชั่วโมงที่ 6

#### ขั้นที่ 4 ลงมือทำ (Doing)

26. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 3.1 ข้อ 1-5 จากหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว จากนั้นครูสุ่มนักเรียนออกมาเฉลยคำตอบหน้าชั้นเรียน โดยครูตรวจสอบความถูกต้อง

27. นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 3 คน โดยแต่ละกลุ่มร่วมกันทำแบบฝึกทักษะ 3.1 ข้อ 6 ระดับท้าทาย จากหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว

28. ครูสุ่มเลือกนักเรียน 1 กลุ่มออกมานำเสนอแนวคิดในการหาคำตอบหน้าชั้นเรียน

#### ขั้นสรุป

1. นักเรียนสรุปความรู้รวบยอดเรื่อง การทดลองสุ่ม แซมเปิลสเปซและเหตุการณ์ ลงในสมุดประจำตัว
2. นักเรียนและครูร่วมกันสรุปเกี่ยวกับการทดลองสุ่ม แซมเปิลสเปซและเหตุการณ์

## การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
1. การประเมินก่อนเรียน - แบบทดสอบก่อนเรียน หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น	- ตรวจสอบแบบทดสอบ ก่อนเรียน หน่วยการ เรียนรู้ที่ 3 ความน่า จะเป็น	- แบบทดสอบก่อนเรียน หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น	- ประเมินตามสภาพจริง
2. ประเมินระหว่าง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้			
1) การทดลองสุ่มแซมเปิด สเปซและเหตุการณ์	- ตรวจสอบใบงานที่ 3.1.1 - ตรวจสอบสมุดประจำตัว	- ใบงานที่ 3.1.1 - สมุดประจำตัว	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน/ ผลการทำกิจกรรม	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน/ผลการทำ กิจกรรม	- แบบการนำเสนอ ผลงาน/ผลการทำ กิจกรรม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงาน กลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย รับผิดชอบ ใฝ่เรียนรู้ และ มุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

## สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

### สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น
- 2) ใบงานที่ 3.1.1 เรื่อง การทดลองสุ่ม
- 3) สมุดประจำตัว

### แหล่งการเรียนรู้

-

## ใบงาน 3.1.1

### เรื่อง การทดลองสุ่ม

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนพิจารณาว่าเหตุการณ์ใดบ้างที่จัดเป็นการทดลองสุ่มและเหตุการณ์ใดบ้างไม่จัดเป็นการทดลองสุ่ม

1. ออมซื้อเสื้อยืดมา 3 ตัว 3 สี ให้เพื่อนเลือกไป 1 ตัว

ตอบ .....

2. ลูกอม 3 สี บรรจุในกระป๋องทึบ ให้หยิบมา 1 เม็ด

ตอบ .....

3. การตอบข้อสอบ 4 ตัวเลือกแบบเดาสุ่ม

ตอบ .....

4. สภาพอากาศวันนี้ฝนจะตกหรือไม่ตก

ตอบ .....

5. การทำข้อสอบอัตนัย

ตอบ .....

6. การเลือกซื้อรองเท้า

ตอบ .....

7. การจับฉลากของขวัญปีใหม่ในห้องเรียน

ตอบ .....

8. การซื้อสลากกินแบ่งรัฐบาล

ตอบ .....

## เรื่อง การทดลองสุ่ม

คำชี้แจง : ให้นักเรียนพิจารณาว่าเหตุการณ์ใดบ้างที่จัดเป็นการทดลองสุ่มและเหตุการณ์ใดบ้างไม่จัดเป็นการทดลองสุ่ม

1. ออมซื้อเสื้อยืดมา 3 ตัว 3 สี ให้เพื่อนเลือกไป 1 ตัว

ตอบ ไม่เป็นการทดลองสุ่ม.....

2. ลูกอม 3 สี บรรจุในกระป๋องทึบ ให้หยิบมา 1 เม็ด

ตอบ ไม่เป็นการทดลองสุ่ม.....

3. การตอบข้อสอบ 4 ตัวเลือกแบบเดาสุ่ม

ตอบ เป็นการทดลองสุ่ม.....

4. สภาพอากาศวันนี้ฝนจะตกหรือไม่ตก

ตอบ เป็นการทดลองสุ่ม.....

5. การทำข้อสอบอัตนัย

ตอบ ไม่เป็นการทดลองสุ่ม.....

6. การเลือกซื้อรองเท้า

ตอบ ไม่เป็นการทดลองสุ่ม.....

7. การจับฉลากของขวัญปีใหม่ในห้องเรียน

ตอบ เป็นการทดลองสุ่ม.....

8. การซื้อสลากกินแบ่งรัฐบาล

ตอบ เป็นการทดลองสุ่ม.....



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง ความน่าจะเป็น

จำนวน 19 ชั่วโมง

เรื่อง ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

จำนวน 7 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

### ผลการเรียนรู้

หาความน่าจะเป็นและนำความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นไปใช้

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกสมบัติของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ได้ (K)
2. เขียนวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ได้ (P)
3. ตั้งใจเรียนรู้และแสวงหาความรู้ รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

### สาระการเรียนรู้

- การทดลองสุ่มและเหตุการณ์
- ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

### สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

กำหนดปริภูมิตัวอย่าง  $S$  เป็นเซตจำกัด ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน  
ถ้า  $E$  เป็นเหตุการณ์ซึ่ง  $E \subset S$  ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์  $E$  เขียนแทนด้วย  $P(E)$  ซึ่ง

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

เมื่อ  $n(E)$  แทน จำนวนสมาชิกของเหตุการณ์  $E$

$n(S)$  แทน จำนวนสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง  $S$

สมบัติของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ มีดังนี้

- 1) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ๆ มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1 เสมอ นั่นคือ  $0 \leq P(E) \leq 1$

โดย  $P(E) = 0$  หมายถึง เหตุการณ์  $E$  ไม่มีโอกาสเกิดขึ้นเลย

$P(E) = 1$  หมายถึง เหตุการณ์  $E$  เกิดขึ้นอย่างแน่นอน

- 2) ความน่าจะเป็นของปริภูมิตัวอย่าง  $S$  มีค่าเท่ากับ 1 เสมอ นั่นคือ  $P(S) = 1$

- 3) ความน่าจะเป็นของเซตว่างมีค่าเท่ากับ 0 นั่นคือ  $P(\emptyset) = 0$

## สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา 4. ความสามารถในการใช้ทักษะชีวิต 5. ความสามารถในการใช้เทคโนโลยี	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : แบบ Concept Based Teaching

### ชั่วโมงที่ 1

#### ชั้นนำ

#### ขั้นที่ 1 การใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

ครูและนักเรียนร่วมกันหาคำจำกัดความของความน่าจะเป็น จากการสมมติเหตุการณ์การทอดลูกเต๋า 1 ลูก จากนั้นครูถามคำถามกับนักเรียน ดังนี้

- ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าทิ้งแต้ม 2 เป็นเท่าใด

(แนวคำตอบ : 1 ใน 6)

- ตัวเลข 1 ข้างหน้าหมายถึงอะไร และตัวเลข 6 ข้างหลัง หมายถึงอะไร

(แนวคำตอบ : ตัวเลข 1 ข้างหน้าหมายถึง ผลลัพธ์ที่ต้องการคือลูกเต๋าทิ้งแต้ม 1 มี 1 แบบ ตัวเลข 6 ข้างหลังหมายถึง ผลลัพธ์ทั้งหมดที่จะเกิดขึ้นได้ มี 6 แบบ คือ 1,2,3,4,5,6)

- ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าทิ้งเลขคู่เป็นเท่าใด

(แนวคำตอบ : 3 ใน 6 หรือ 1 ใน 2)

- ตัวเลข 3 ข้างหน้าหมายถึงอะไร และตัวเลข 6 ข้างหลัง หมายถึงอะไร

(แนวคำตอบ : ตัวเลข 3 ข้างหน้าหมายถึง ผลลัพธ์ที่ต้องการคือลูกเต๋าทิ้งเลขคู่มี 3 แบบ คือ 2,4,6 และตัวเลข 6 ข้างหลังหมายถึง ผลลัพธ์ทั้งหมดที่จะเกิดขึ้นได้ มี 6 แบบ คือ 1,2,3,4,5,6 )

#### ขั้นสอน

#### ขั้นที่ 2 รู้ (Knowing)

1. ครูถามคำถามกับนักเรียนว่า “ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ๆ หาได้อย่างไร”

(แนวคำตอบ : จำนวนผลลัพธ์ที่ต้องการส่วนด้วยจำนวนผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมด)

2. ครูกล่าวกับนักเรียนว่า “ผลลัพธ์ที่ต้องการในเรื่องความน่าจะเป็น เราเรียกว่า เหตุการณ์ (Event) และเรียกผลลัพธ์ทั้งหมดว่า ปริภูมิตัวอย่างหรือแซมเปิลสเปซ (Sample space) เขียนแทนด้วย S”

3. ครูกล่าวกับนักเรียนว่า “ปริภูมิตัวอย่างหรือแซมเปิลสเปซ (Sample space) ปริภูมิตัวอย่าง เป็นเซตของผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจเป็นไปได้จากการทดลองสุ่ม และนิยามของคำว่า เหตุการณ์ (Event) เหตุการณ์ เป็นสับเซตของ S ซึ่งเป็นเซตของผลลัพธ์ที่สนใจ”

4. นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 3 คน โดยแต่ละกลุ่มทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

5. นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนออกมานำเสนอคำตอบหน้าชั้นเรียน

## ชั่วโมงที่ 2

### ขั้นที่ 2 รู้ (Knowing)

6. นักเรียนศึกษาบทนิยามและสมบัติของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

7. นักเรียนทำใบงานที่ 3.2.1 เรื่อง ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ ข้อ 1

8. ครูกล่าวกับนักเรียนว่า “การหาจำนวนผลการทดลองทั้งหมดต้องพิจารณาให้รอบคอบว่าสนใจด้านใด ของการทดลองสุ่มนั้น แม้จะเป็นการทดลองสุ่มเดียวกันแต่สนใจคนละด้าน แซมเปิลสเปซก็ไม่จำเป็นต้องเหมือนกัน”

9. ครูอธิบายว่า “จากใบงานที่ 3.2.1 เรื่อง ความน่าจะเป็น ข้อ 1.2 , 1.4 และ 1.6 ไม่สามารถหา ความน่าจะเป็นได้ เพราะสัดส่วนของจำนวนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นได้ไม่เท่ากัน เช่น ลูกเต๋ามีด้านที่เป็นสีดำ 5 หน้า และมีด้านที่เป็นสีแดง 1 หน้า ดังนั้น ถ้าระบุแซมเปิลสเปซเป็นสีดำและสีแดง แต่ต้องการความน่าจะเป็นที่จะโยนได้สีแดง เป็น  $\frac{1}{2}$  ไม่ได้”

10. นักเรียนทำใบงานที่ 3.2.1 เรื่อง ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ ข้อ 2

## ชั่วโมงที่ 3

### ขั้นที่ 3 เข้าใจ (Understanding)

11. ครูกล่าวกับนักเรียนว่า “จากบทที่แล้วเราเรียนเรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ ทำให้เรารู้ การหาจำนวนวิธีในการทำงานหลายรูปแบบ เราสามารถนำมาใช้ในการหาจำนวนเหตุการณ์หรือจำนวน ปริภูมิตัวอย่างได้”

12. ครูถามคำถามกับนักเรียนว่า “ในบทเรียนเรื่องที่เราได้สูตรการหาวิธีการทำงานอย่างไรบ้าง”

(แนวคำตอบ : หลักการคูณ (เป็นการทำงานที่ต่อเนื่องกัน)

จำนวนวิธีการทำงานทั้งหมด =  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$  วิธี

หลักการบวก (เป็นการทำงานที่ไม่ต่อเนื่องกัน)

จำนวนวิธีการทำงานทั้งหมด =  $n_1 + n_2 + \dots + n_k$  วิธี )

13. นักเรียนศึกษากรอบคณิตน่ารู้ ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

14. ครูกล่าวกับนักเรียนว่า “ในกรณีความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เป็นค่าคงตัว ซึ่งสมาชิกของ E และ S แต่ละตัวมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่ากัน การหาจำนวนสมาชิกปริภูมิตัวอย่างและจำนวนสมาชิกในเหตุการณ์สามารถใช้การแจกแจงสมาชิก ใช้สูตรการเรียงสับเปลี่ยน  $P_{n,r}$  หรือใช้สูตรการจัดหมู่  $C_{n,r}$  ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนด”

15. นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 7 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

16. นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

17. นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 8 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

18. นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

#### ชั่วโมงที่ 4

#### ขั้นที่ 3 เข้าใจ (Understanding)

19. นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 9 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

20. นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

21. นักเรียนจับคู่กับเพื่อน โดยแต่ละคู่ศึกษาแนวข้อสอบ PAT1 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น จากนั้นร่วมกันแลกเปลี่ยนความคิดเห็น

22. นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 10 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

23. นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

## ชั่วโมงที่ 5

### ขั้นที่ 3 เข้าใจ (Understanding)

24. นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 11 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

25. นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

26. นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 12 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

27. นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

## ชั่วโมงที่ 6

### ขั้นที่ 4 ลงมือทำ (Doing)

28. ครูยกตัวอย่างโจทย์บนกระดาน จากนั้นให้นักเรียนร่วมกันหาคำตอบ ดังต่อไปนี้

• ตึกหลังหนึ่งมีประตูเข้า-ออกได้ 3 ประตู เด็ก 3 คน จะเดินเข้าและออกจากตึกแห่งนี้แบบสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่ทั้ง 3 คน เข้าและออกจากตึกโดยใช้วิธีที่แตกต่างกันทั้งสามคน

วิธีคิด จากโจทย์ การเดินเข้าออกของเด็ก 3 คน ใช้ประตูซ้ำกันได้

$$\begin{aligned}n(S) &= \text{จำนวนวิธีเข้าของแต่ละคนได้ 3 วิธีและออกได้อีก 3 วิธี} \\ &= (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) \\ &= 9 \times 9 \times 9 \text{ วิธี}\end{aligned}$$

$$n(E) = \text{แต่ละคนจะเดินเข้าและออกโดยไม่ใช้วิธีซ้ำกัน}$$

ดังนั้น เด็กคนที่ 1 เข้าและออกได้ 9 วิธี

เด็กคนที่ 2 เข้าและออกได้ 8 วิธี

เด็กคนที่ 3 เข้าและออกได้ 7 วิธี

$$n(E) = 9 \times 8 \times 7 \text{ วิธี}$$

$$\text{ดังนั้น } P(E) = \frac{9 \times 8 \times 7}{9 \times 9 \times 9} = \frac{56}{81}$$

- ให้สลับตัวอักษรจากคำว่า “POTATO” อย่างสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่ตัวอักษร T 2 ตัว เรียงติดกัน และอักษร O 2 ตัวเรียงติดกัน

วิธีคิด อักษรมีทั้งหมด 6 ตัว มีซ้ำ 2 ตัว แยกได้เป็น TT, OO, M, A

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } n(S) &= \frac{6!}{2!2!} \\ &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{2} \\ &= 6 \times 5 \times 3 \times 2 \end{aligned}$$

ต้องการเหตุการณ์ที่ T 2 ตัวอยู่ติดกันใช้การมัดรวมเป็น 1 กลุ่ม

และเหตุการณ์ที่ O 2 ตัวอยู่ติดกันใช้การมัดรวมเป็น 1 กลุ่ม

ดังนั้น TT, OO, M, A จึงมี 4 กลุ่ม

$$\text{จะได้ } n(E) = 4! \text{ วิธี}$$

$$\text{ดังนั้น } P(E) = \frac{6 \times 5 \times 3 \times 2}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{2}{15}$$

- ในการสอบสัมภาษณ์มีผู้สอบผ่านเข้ารอบ 3 คน แต่ละคนต้องเลือกคำถามจากคำถามทั้งหมด 5 คำถาม จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้เข้าสัมภาษณ์อย่างน้อย 2 คน เลือกคำถามเดียวกัน

วิธีคิด  $n(S)$  = จำนวนวิธีที่คน 3 คนเลือกคำถาม 1 คำถามจาก 5 คำถาม

$$\text{จะได้ } n(S) = \binom{5}{1} \binom{5}{1} \binom{5}{1} = 125 \text{ วิธี}$$

$n(E)$  = จำนวนวิธีที่คนอย่างน้อย 2 คน เลือกคำถามเดียวกัน

กรณีที่ 1 มี 2 คนเลือกคำถามเดียวกัน

$$\text{จะได้ } n(E) = \binom{3}{2} \binom{5}{1} \binom{4}{1} = 60 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 2 มี 3 คนเลือกคำถามเดียวกัน

$$\text{จะได้ } n(E) = \binom{3}{3} \binom{5}{1} = 5 \text{ วิธี}$$

นั่นคือ จะได้  $n(E) = 60 + 5 = 65$

$$\text{ดังนั้น } P(E) = \frac{65}{125} = \frac{13}{25}$$

29.นักเรียนใบงานที่ 3.2.2 เรื่อง โจทย์ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

ชั่วโมงที่ 7

#### ขั้นที่ 4 ลงมือทำ (Doing)

30. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 3.2 ข้อ 1 – 4 จากหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัวจากนั้นครูสุ่มนักเรียนออกมาเฉลยคำตอบหน้าชั้นเรียน โดยครูตรวจสอบความถูกต้อง

31. นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 3 คน โดยแต่ละกลุ่มร่วมกันทำแบบฝึกทักษะ 3.2 ข้อ 5-6 จากหนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว

32. ครูสุ่มเลือกนักเรียน 1 กลุ่มออกมานำเสนอแนวคิดในการหาคำตอบหน้าชั้นเรียน

ขั้นสรุป

นักเรียนและครูร่วมกันสรุปเกี่ยวกับความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

## การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่าง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) ความน่าจะเป็นของ เหตุการณ์	- ตรวจใบงานที่ 3.2.1 - ตรวจใบงานที่ 3.2.2 - ตรวจสอบประจำตัว	- ใบงานที่ 3.2.1 - ใบงานที่ 3.2.2 - สมุดประจำตัว	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน/ ผลการทำกิจกรรม	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน/ผลการทำ กิจกรรม	- แบบการนำเสนอ ผลงาน/ผลการทำ กิจกรรม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงาน กลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึง ประสงค์	- สังเกตความมีวินัย รับผิดชอบ ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการ ทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

## สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

### สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น
- 2) ใบงานที่ 3.2.1 เรื่อง ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์
- 3) ใบงานที่ 3.2.2 เรื่อง โจทย์ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์
- 4) สมุดประจำตัว

### แหล่งการเรียนรู้

-



## ใบงานที่ 3.2.1

### เรื่อง ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

**คำชี้แจง :** ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่าง

- ให้นักเรียนเขียนแซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่ม (S) ต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาจำนวนของแซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่ม  $n(S)$

การทดลองสุ่ม	แซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่ม (S)	$n(S)$
1. ทีมฟุตบอลหมูป่ากับทีมจิ้งจอกขาว สนใจผลการแข่งขันของทีมหมูป่า		
2. หลอดไฟ 4 หลอด สนใจจำนวนหลอดไฟที่เสีย		
3. การสอบที่ได้คะแนนเต็ม มีคะแนนเต็ม 5 คะแนน สนใจคะแนนสอบที่ได้		
4. ลูกเต๋า 1 ลูก สนใจสีบนหน้าของลูกเต๋า		
5. ลูกเต๋า 1 ลูก สนใจแต้มหน้าของลูกเต๋า		
6. โยนเหรียญ 1 เหรียญ 3 ครั้ง สนใจจำนวนครั้งที่ขึ้นหัว		

- จากการทดลองสุ่มในข้อ 1. จงเติมคำตอบในช่องว่างต่อไปนี้

เหตุการณ์	E	$n(E)$	$P(E)$
1. เหตุการณ์ที่จะแข่งขันชนะ			
2. เหตุการณ์ที่จะสอบผ่าน ถ้าเกณฑ์การสอบผ่านคือเกิน 3 คะแนน			
3. เหตุการณ์ที่แต้มของลูกเต๋ามีค่าน้อยกว่า 3			

เรื่อง ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

คำชี้แจง : ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่าง

1. ให้นักเรียนเขียนแซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่ม (S) ต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาจำนวนของแซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่ม  $n(S)$

การทดลองสุ่ม	แซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่ม (S)	$n(S)$
1. ทีมฟุตบอลหมูป่ากับทีมจิ้งจอกขาว สนใจผลการแข่งขันของทีมหมูป่า	$S = \{\text{ชนะ, แพ้, เสมอ}\}$	3
2. หลอดไฟ 4 หลอด สนใจจำนวนหลอดไฟที่เสีย	$S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$	5
3. การสอบที่ได้คะแนนเต็ม มีคะแนนเต็ม 5 คะแนน สนใจคะแนนสอบที่ได้	$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	6
4. ลูกเต๋า 1 ลูก สนใจสีบนหน้าของลูกเต๋า	$S = \{\text{ดำ, แดง}\}$	2
5. ลูกเต๋า 1 ลูก สนใจแต้มหน้าของลูกเต๋า	$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	6
6. โยนเหรียญ 1 เหรียญ 3 ครั้ง สนใจจำนวนครั้งที่ขึ้นหัว	$S = \{0, 1, 2, 3\}$	4

2. จากการทดลองสุ่มในข้อ 1. จงเติมคำตอบในช่องว่างต่อไปนี้

เหตุการณ์	E	$n(E)$	$P(E)$
1. เหตุการณ์ที่จะแข่งขันชนะ	$E = \{\text{ชนะ}\}$	1	$\frac{1}{3}$
2. เหตุการณ์ที่จะสอบผ่าน ถ้าเกณฑ์การสอบผ่านคือเกิน 3 คะแนน	$E = \{3, 4, 5\}$	3	$\frac{3}{6}$
3. เหตุการณ์ที่แต้มของลูกเต๋ามีค่าน้อยกว่า 3	$E = \{1, 2\}$	2	$\frac{2}{6}$



เรื่อง โจทย์ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

คำชี้แจง : ให้นักเรียนแสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้

- 1) พ่อแม่และลูก 2 คน ไปเที่ยวเกาหลี เข้าพักในโรงแรมแห่งหนึ่ง 2 ห้องแต่ละห้องพักได้ 2 คน  
จงหาความน่าจะเป็นที่พ่อและแม่แยกกันอยู่คนละห้อง

วิธีทำ การจัดคน 4 คนเข้าห้องพัก 2 ห้อง ห้องละ 2คน ถือเป็นการจัดเรียงของซ้ำจะจัดได้

ในที่นี้มีจำนวนคนที่พักเท่ากัน 2 ห้องจึงจัดได้

เมื่อให้พ่อและแม่อยู่แยกกันจะจัดได้อีก  $2!$  วิธี

ดังนั้นจึงมีวิธีจัดได้ทั้งหมด = 6 วิธี

จะได้  $n(S) = 6$

$n(E)$  คือ จำนวนวิธีที่พ่อและแม่แยกกันคนละห้อง

จะได้  $n(E) = 2!2! = 4$

ดังนั้น  $P(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

- 2) นักเรียน 6 คน (มีฟ้าและฝนรวมอยู่ด้วย) นั่งประชมรอบโต๊ะกลมความน่าจะเป็นที่ฟ้าและฝนนั่งติดกันเป็น  
เท่าใด

วิธีทำ จำนวนวิธีจัดคนนั่งโต๊ะกลมทั้งหมดคือ  $(6-1)!$

จะได้  $n(S) = 5!$

จำนวนวิธีฟ้าและฝนนั่งติดกันคือ  $4!2!$

จะได้  $n(E) = 4!2! = 48$

ดังนั้น  $P(E) = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$

### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง ความน่าจะเป็น

เรื่อง กฎที่สำคัญบางประการเกี่ยวกับความน่าจะเป็น

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

จำนวน 19 ชั่วโมง

จำนวน 6 ชั่วโมง

โรงเรียนสตรีศึกษา

#### ผลการเรียนรู้

หาความน่าจะเป็นและนำความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นไปใช้

#### จุดประสงค์การเรียนรู้

1. อธิบายกฎที่สำคัญบางประการเกี่ยวกับความน่าจะเป็นได้ (K)
2. เขียนวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับกฎที่สำคัญบางประการเกี่ยวกับความน่าจะเป็นได้ (P)
3. ตั้งใจเรียนรู้และแสวงหาความรู้ รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

#### สาระการเรียนรู้

- การทดลองสุ่มและเหตุการณ์
- ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

#### สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น ดังนี้

$$1) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$2) \text{ ถ้า } A \cap B = \emptyset \text{ แล้ว } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$3) P(A') = 1 - P(A)$$

$$4) P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$5) P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A')$$

$$= P(B) + P(A \cap B')$$


$$6) P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A')$$

$$7) P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

## สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการสังเกต 2) ทักษะการระบุ 3) ทักษะการวิเคราะห์ 4) ทักษะกระบวนการคิดแก้ปัญหา 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา 4. ความสามารถในการใช้ทักษะชีวิต 5. ความสามารถในการใช้เทคโนโลยี	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

 แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : แบบ Concept Based Teaching

### ชั่วโมงที่ 1

#### ชั้นนำ

#### ขั้นที่ 1 การใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

1. ครูทบทวนเรื่องความน่าจะเป็น โดยตั้งคำถามว่า ความน่าจะเป็นแทนด้วยสัญลักษณ์อะไร

$$\text{(แนวคำตอบ : } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}\text{)}$$

#### ขั้นสอน

#### ขั้นที่ 2 รู้ (Knowing)

1. นักเรียนทำใบงานที่ 3.3.1 เรื่องความน่าจะเป็น

2. นักเรียนและครูร่วมกันสรุปสมบัติความน่าจะเป็น ดังนี้

1) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ๆ มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1 เสมอ นั่นคือ  $0 \leq P(E) \leq 1$

โดย  $P(E) = 0$  หมายถึง เหตุการณ์ E ไม่มีโอกาสเกิดขึ้นเลย

$P(E) = 1$  หมายถึง เหตุการณ์ E เกิดขึ้นอย่างแน่นอน

2) ความน่าจะเป็นของปริภูมิตัวอย่าง S มีค่าเท่ากับ 1 เสมอ นั่นคือ  $P(S) = 1$

3) ความน่าจะเป็นของเซตว่างมีค่าเท่ากับ 0 นั่นคือ  $P(\emptyset) = 0$

3. ครูให้นักเรียนยกตัวอย่างเหตุการณ์ที่จะได้ค่าความน่าจะเป็น 1 มา 3 เหตุการณ์ เช่น

- 1) กล่องใส่ดินสอ 3 ชนิด คือ HB, 2B และ B3
  - 1.1) จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบขึ้นมา 1 แท่งแล้วได้ดินสอ
  - 1.2) จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบขึ้นมา 1 แท่งแล้วได้ปากกา
- 2) โยนเหรียญบาท 1 เหรียญ 1 ครั้ง
  - 2.1) จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะออกหัวหรือก้อย
  - 2.2) จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะออกแต้ม 2
- 3) กล่องใบหนึ่งใส่ลูกอม 3 เม็ด หยิบขึ้นมา 1 เม็ด
  - 3.1) จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกอม
  - 3.2) จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอล

## ชั่วโมงที่ 2

### ขั้นที่ 2 รู้ (Knowing)

4. ครูทบทวนการหาจำนวนสมาชิกของเซต 2 เซต และ 3 เซต รวมทั้งการเขียนแผนภาพเวนและออยเลอร์ในการช่วยหาจำนวนสมาชิก

(แนวคำตอบ :  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$   $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$  )

5. นักเรียนใบงานที่ 3.3.2 เรื่อง การหาความน่าจะเป็นโดยใช้ความรู้เรื่องเซต

6. ครูกล่าวว่า “การแก้โจทย์ปัญหาเรื่องความน่าจะเป็นที่มีมากกว่า 1 เหตุการณ์ ซึ่งอาจมีความสัมพันธ์กันภายใต้ตัวดำเนินการของเซต เช่น ยูเนียน อินเตอร์เซกชัน คอมพลีเมนต์ หรือผลต่าง นักเรียนสามารถคำนวณหาความน่าจะเป็นโดยการยูเนียน อินเตอร์เซกชัน คอมพลีเมนต์ หรือผลต่างของเหตุการณ์ได้ โดยใช้กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น ดังนี้

- 1)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- 2) ถ้า  $A \cap B = \emptyset$  แล้ว  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- 3)  $P(A') = 1 - P(A)$
- 4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- 5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A')$   
 $= P(B) + P(A \cap B')$
- 6)  $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A')$
- 7)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

7. ครุยกตัวอย่างโจทย์ที่ใช้กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็นไปใช้แก้ปัญหาบนกระดาน แล้วให้นักเรียนร่วมกันหาคำตอบ ดังนี้

- กำหนดให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆในแซมเปิลสเปซ  
 $P(A \cup B) = 0.75$  ,  $P(A) = 0.65$  และ  $P(A \cap B) = 0.2$   
 จงหา 1)  $P(B - A)$       2)  $P(B')$       3)  $P(A \cup B)'$   
 1)  $P(B - A)$   
 จาก  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$   
 จะได้  $0.75 = 0.65 + P(B) - 0.2$   
 $P(B) = 0.30$   
 ดังนั้น  $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$   
 $= 0.30 - 0.20$   
 $= 0.10$

2)  $P(B')$   
 $P(B') = P(U) - P(B)$   
 $= 1 - 0.3$   
 $= 0.7$

3)  $P(A \cup B)'$   
 $P(A \cup B)' = P(U) - P(A \cup B)$   
 $= 1 - 0.75$   
 $= 0.25$

ชั่วโมงที่ 3

**ขั้นที่ 2 รู้ (Knowing)**

- นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 13 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น
- นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ
- นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 14 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น



11. นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

### ขั้นที่ 2 รู้ (Knowing)

12. ครูยกตัวอย่างโจทย์ที่นำสมบัติบางประการของเซตที่จะนำมาใช้ในการหาความน่าจะเป็นที่ซับซ้อนขึ้นบนกระดาน จากนั้นให้นักเรียนร่วมกันหาคำตอบโดยสุ่มนักเรียนออกมาหาคำตอบ ดังต่อไปนี้

- $E_1$  และ  $E_2$  เป็นเหตุการณ์ใดในแซมเปิลสเปซ  $S$

$$\text{ถ้า } P(E_1) = 0.4, P(E_2 - E_1) = 0.3 \text{ และ } P(E_1 \cap E_2) = 0.2$$

$$\text{จงหา 1) } P(E'_1 \cap E'_2) \quad 2) P(E'_1 \cup E'_2) \quad 3) P(E'_1 \cup E_2)$$

$$1) P(E'_1 \cap E'_2)$$

$$P(E'_1 \cap E'_2) = P(E_1 \cup E_2)'$$

$$\begin{aligned} \text{หา } P(E_2) &= P(E_1) + 0.3 \\ &= 0.4 + 0.3 \\ &= 0.7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{หา } P(E_1 \cup E_2) &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \\ &= 0.4 + 0.7 - 0.2 \\ &= 0.9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } P(E'_1 \cap E'_2) &= P(E_1 \cup E_2)' \\ &= 1 - P(E_1 \cup E_2) \\ &= 1 - 0.9 \\ &= 0.1 \end{aligned}$$

$$2) P(E'_1 \cup E'_2)$$

$$\begin{aligned} \text{จาก } P(E'_1 \cup E'_2) &= P(E_1 \cap E_2)' \\ &= 1 - P(E_1 \cap E_2) \\ &= 1 - 0.2 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

$$3) P(E'_1 \cup E_2)$$

$$\begin{aligned} \text{หา } P(E'_1) &= 1 - P(E_1) \\ &= 1 - 0.4 \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

$$\text{เนื่องจาก } P(E'_1 \cap E_2) = P(E_2 - E_1)$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad P(E_1' \cup E_2) &= P(E_1') + P(E_2) - P(E_1' \cap E_2) \\ &= 0.6 + 0.7 - 0.3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

- กำหนดให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ใดในแซมเปิลสเปซ S โดยที่ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน ถ้า  $P(A) = 0.5$  ,  $P(B) = 0.3$  แล้วข้อใดไม่ถูกต้อง

✓ 1.  $P(A \cup B) = 0.8$

เพราะ  $P(A \cup B) = 0.5 + 0.3 = 0.8$

✓ 2.  $P(A \cap B) = 0$

เพราะ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

✗ 3.  $P(A \cup B) = 1$

เพราะจากข้อ 1)

✓ 4.  $P(B' \cap A) = 0.5$

เพราะ  $P(B' \cap A) = P(A) - P(A \cap B) = 0.5 - 0 = 0.5$

✗ 5.  $P(A' \cap B') = 0$

เพราะ  $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - 0.8 = 0.2$

✓ 6.  $P(A' \cup B') = 1$

เพราะ  $P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - 0 = 1$

- กำหนดให้ A, B และ C เป็นสับเซตของแซมเปิลสเปซ S โดยที่  $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \emptyset$  และ  $A \cup B \cup C = S$  ถ้า  $P(A) = 0.26$  และ  $P(B) = 0.34$

จงหา 1)  $P(C)$       2)  $P(A \cup C)$       3)  $P(A \cup B)$

1)  $P(C)$

เนื่องจาก A, B และ C เป็นเซตที่อิสระต่อกัน และ  $A \cup B \cup C = S$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad P(C) &= 1 - P(A) - P(B) \\ &= 1 - 0.26 - 0.34 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

2)  $P(A \cup C)$

$$\begin{aligned} P(A \cup C) &= P(A) + P(C) \\ &= 0.26 + 0.4 \\ &= 0.66 \end{aligned}$$

$$3) P(A \cup B)$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= 0.26 + 0.34 \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

#### ชั่วโมงที่ 4

#### ขั้นที่ 2 รู้ (Knowing)

13. ครูยกตัวอย่างโจทย์ปัญหาที่ใช้สมบัติของความน่าจะเป็นและกฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็นบนกระดาน จากนั้นให้นักเรียนร่วมกันหาคำตอบโดยสุ่มนักเรียนออกมาหาคำตอบ ดังต่อไปนี้

- ในการสำรวจนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 120 คน ปรากฏว่าความน่าจะเป็นที่นักเรียน

เลือกวิชาศิลปะเท่ากับ  $\frac{3}{4}$  ความน่าจะเป็นที่นักเรียนเลือกวิชาการละครเท่ากับ  $\frac{5}{8}$  ถ้าความน่าจะเป็นที่ชอบ

อย่างน้อย 1 วิชา เท่ากับ  $\frac{5}{6}$  แล้วมีนักเรียนกี่คนที่ชอบมากกว่า 1 วิชา

#### วิธีคิด

A แทนจำนวนนักเรียนที่ชอบวิชาศิลปะ

B แทนจำนวนนักเรียนที่ชอบวิชาการละคร

$A \cup B$  แทน จำนวนนักเรียนที่ชอบอย่างน้อย 1 วิชา

$A \cap B$  แทน จำนวนนักเรียนที่ชอบมากกว่า 1 วิชา

เนื่องจาก  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\text{จะได้} \quad \frac{5}{6} = \frac{3}{4} + \frac{5}{8} - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{13}{24}$$

$$\text{ดังนั้นมีนักเรียนที่ชอบมากกว่า 1 วิชา} \quad \frac{13}{24} \times 120 = 65 \text{ คน}$$

- จากการลงทะเบียนเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีนักเรียนเลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 50 คน เลือกเรียนวิชาฟิสิกส์ 20 คน และมีนักเรียนเลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์และวิชาฟิสิกส์ 15 คน ถ้าสุ่มเลือกนักเรียน 1 คน แล้วความน่าจะเป็นที่นักเรียนเลือกวิชาคณิตศาสตร์หรือวิชาฟิสิกส์เพียงวิชาเดียวเท่ากับเท่าใด

**วิธีคิด**

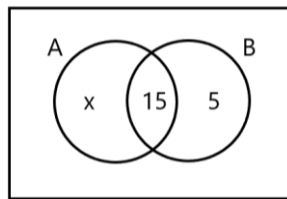
A แทนนักเรียนที่เลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์

B แทนนักเรียนที่เลือกเรียนวิชาฟิสิกส์

$A \cup B$  แทน นักเรียนที่เลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์หรือฟิสิกส์

$A \cap B$  แทน นักเรียนที่เลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์และฟิสิกส์

เนื่องจาก ถ้าวาดแผนภาพเวนและออยเลอร์ประกอบจะได้



มีนักเรียนที่เลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์หรือฟิสิกส์อยู่ 50 คน แทนด้วย  $A \cup B$

$$\text{จาก } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\text{จะได้ } 50 = n(A) + 20 - 15$$

$$n(A) = 45$$

จะได้ว่ามีนักเรียนที่เลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์ทั้งหมด 45 คน

มีนักเรียนที่เลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์อย่างเดียวกเท่ากับ  $45 - 15 = 30$  คน

มีนักเรียนที่เลือกเรียนวิชาฟิสิกส์อย่างเดียวกเท่ากับ  $20 - 15 = 5$  คน

นั่นคือมีนักเรียนเลือกวิชาคณิตศาสตร์หรือวิชาฟิสิกส์เพียงวิชาเดียวเท่ากับ

$$30 + 5 = 35 \text{ คน}$$

จากนักเรียนที่มีทั้งหมดจำนวน 50 คน

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่สุ่มนักเรียนมา 1 คน แล้วนักเรียนเลือกวิชาคณิตศาสตร์หรือวิชาฟิสิกส์

$$\text{เพียงวิชาเดียวเท่ากับ } \frac{35}{50} = \frac{7}{10}$$

**ชั่วโมงที่ 5**

**ขั้นที่ 4 ลงมือทำ (Doing)**

14. นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 13 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

15. นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

16. นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 14 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

17. นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

18. นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 15 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

19. นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

20. นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 16 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

21. นักเรียนทำกิจกรรมลองทำดูในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

## ชั่วโมงที่ 6

### ขั้นที่ 4 ลงมือทำ (Doing)

22. นักเรียนจับคู่กับเพื่อน โดยแต่ละคู่ศึกษาแนวข้อสอบ PAT1 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น จากนั้นร่วมกันแลกเปลี่ยนความคิดเห็น

23. นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 3 คน โดยแต่ละกลุ่มร่วมกันทำแบบฝึกทักษะ 3.2 ข้อ 7-10 จากหนังสือ เรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น ลงในสมุดประจำตัว

24. ครูสุ่มเลือกนักเรียน 1 กลุ่มออกมานำเสนอแนวคิดในการหาคำตอบหน้าชั้นเรียน

25. นักเรียนทำใบงานที่ 3.3.3 เรื่อง กฎที่สำคัญบางประการเกี่ยวกับความน่าจะเป็น

### ขั้นสรุป

1. นักเรียนทำแบบประเมินตรวจสอบตนเอง ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

2. นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 3-4 คน ให้แต่ละกลุ่มช่วยกันตอบคำถามกิจกรรมคณิตศาสตร์ในชีวิตจริง ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น จากนั้นครูสุ่มนักเรียน 1 กลุ่ม ออกมานำเสนอคำตอบหน้าชั้นเรียน

3. นักเรียนอ่านสรุปแนวคิดหลัก ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ป.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น

4. นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น เพื่อตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของนักเรียน จากนั้นครูเฉลยคำตอบให้นักเรียนตรวจสอบด้วยตนเอง

5. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ ประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ป.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 9 ปริมาตรและความจุ ลงในสมุดประจำตัวเป็นการบ้านแล้วส่งในชั่วโมงถัดไป

## การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่าง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) กฎที่สำคัญบางประการ เกี่ยวกับความน่าจะเป็น	- ตรวจสอบงานที่ 3.3.1 - ตรวจสอบงานที่ 3.3.2 - ตรวจสอบงานที่ 3.3.3 - ตรวจสอบสรุปประจำตัว	- ใบงานที่ 3.3.1 - ใบงานที่ 3.3.2 - ใบงานที่ 3.3.3 - สรุปประจำตัว	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน/ ผลการทำกิจกรรม	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน/ผลการทำ กิจกรรม	- แบบการนำเสนอ ผลงาน/ผลการทำ กิจกรรม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการ ทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการ ทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงาน กลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการ ทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการ ทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึง ประสงค์	- สังเกตความมีวินัย รับผิดชอบ ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการ ทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

## สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

### สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น
- 2) ใบงานที่ 3.3.1 เรื่อง ความน่าจะเป็น
- 3) ใบงานที่ 3.3.2 เรื่อง การหาความน่าจะเป็นโดยใช้ความรู้เรื่อง เซต
- 4) ใบงานที่ 3.3.3 เรื่อง กฎที่สำคัญบางประการเกี่ยวกับความน่าจะเป็น
- 5) สรุปประจำตัว

### แหล่งการเรียนรู้

-

## ใบงานที่ 3.3.1

### เรื่อง ความน่าจะเป็น

---

คำชี้แจง : ให้นักเรียนหาคำตอบของแต่ละข้อต่อไปนี้

1. เหตุการณ์ : โยนลูกเต๋า 1 ลูก สนใจแต้มต่างๆ ที่เกิดขึ้น

1) จงหาเหตุการณ์ที่ลูกเต๋ารับแต้มคู่

ตอบ .....

2) จงเขียนปริภูมิตัวอย่าง

ตอบ .....

3) จงหาเหตุการณ์ที่ลูกเต๋ารับแต้มคี่

ตอบ .....

4) จงหาเหตุการณ์ที่ลูกเต๋ารับแต้มเป็นจำนวนเฉพาะ

ตอบ .....

5) จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋ารับแต้ม 0

ตอบ .....

6) จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋ารับแต้มคู่

ตอบ .....

7) จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋ารับแต้มคี่

ตอบ .....

8) จงหาเหตุการณ์และความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋ารับแต้มเป็นจำนวนเต็มบวก

ตอบ .....

.....

.....

2. ค่าความน่าจะเป็นมีค่าต่ำสุดเท่าใด

ตอบ .....

3. ค่าความน่าจะเป็นมีค่าสูงสุดเท่าใด

ตอบ .....



เรื่อง ความน่าจะเป็น

คำชี้แจง : ให้นักเรียนหาคำตอบของแต่ละข้อต่อไปนี้

1. เหตุการณ์ : โยนลูกเต๋า 1 ลูก สนใจแต้มต่างๆ ที่เกิดขึ้น

1) จงหาเหตุการณ์ที่ลูกเต๋ารับแต้มคู่

ตอบ  $E = \{2, 4, 6\}$  และ  $n(E) = 3$

2) จงเขียนปริภูมิตัวอย่าง

ตอบ  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  และ  $n(S) = 6$

3) จงหาเหตุการณ์ที่ลูกเต๋ารับแต้มคี่

ตอบ  $E = \{1, 3, 5\}$  และ  $n(E) = 3$

4) จงหาเหตุการณ์ที่ลูกเต๋ารับแต้มเป็นจำนวนเฉพาะ

ตอบ  $E = \{2, 3, 5\}$  และ  $n(E) = 3$

5) จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋ารับแต้ม 0

ตอบ  $P(E) = \frac{0}{6} = 0$

6) จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋ารับแต้มคู่

ตอบ  $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

7) จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋ารับแต้มคี่

ตอบ  $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

8) จงหาเหตุการณ์และความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋ารับแต้มเป็นจำนวนเต็มบวก

ตอบ  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  และ  $n(E) = 6$

ดังนั้น  $P(E) = \frac{6}{6} = 1$

2. ค่าความน่าจะเป็นมีค่าต่ำสุดเท่าใด

ตอบ 0

3. ค่าความน่าจะเป็นมีค่าสูงสุดเท่าใด

ตอบ 1

### ใบงานที่ 3.3.2

#### เรื่อง การหาความน่าจะเป็นโดยใช้ความรู้เรื่องเซต

---

คำชี้แจง : ให้นักเรียนหาคำตอบของแต่ละข้อต่อไปนี้

1. กำหนดให้เหตุการณ์ที่หนึ่งแทนด้วย A เหตุการณ์ที่สองแทนด้วย B และเหตุการณ์ที่สามแทนด้วย C จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) ถ้าเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ที่มีความสัมพันธ์กันแทนด้วย  $A \cup B$  แล้ว

$P(A \cup B) =$  .....

เขียนเป็นแผนภาพได้

2) ถ้าเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ที่ไม่มีความสัมพันธ์กันแล้ว

$P(A \cup B) =$  .....

เขียนเป็นแผนภาพได้

3) ถ้าเหตุการณ์ 3 เหตุการณ์ที่มีความสัมพันธ์กันแล้ว

$P(A \cup B \cup C) =$  .....

เขียนเป็นแผนภาพได้

2. กำหนดให้  $n(U) = 10$   $n(A) = 5$   $n(B) = 7$  และ  $n(A \cap B) = 3$

1) จงเขียนเป็นแผนภาพ



2)  $P(A) =$  .....

3)  $P(B) =$  .....

4)  $P(A \cap B) =$  .....

5)  $P(A \cup B) =$  .....

6)  $P(A \cup B)' =$  .....

7)  $P(A - B) =$  .....

8)  $P(A) + P(A \cap B) =$  .....

9)  $P(B) + P(A \cap B) =$  .....

เรื่อง การหาความน่าจะเป็นโดยใช้ความรู้เรื่องเซต

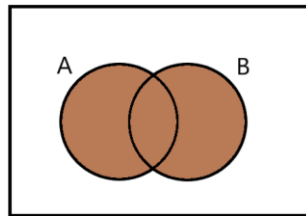
คำชี้แจง : ให้นักเรียนหาคำตอบของแต่ละข้อต่อไปนี้

1. กำหนดให้เหตุการณ์ที่หนึ่งแทนด้วย A เหตุการณ์ที่สองแทนด้วย B และเหตุการณ์ที่สามแทนด้วย C จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) ถ้าเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ที่มีความสัมพันธ์กันแทนด้วย  $A \cup B$  แล้ว

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

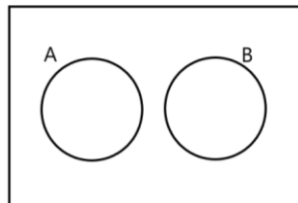
เขียนเป็นแผนภาพได้



2) ถ้าเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ที่ไม่มีความสัมพันธ์กันแล้ว

$$P(A \cup B) = 0$$

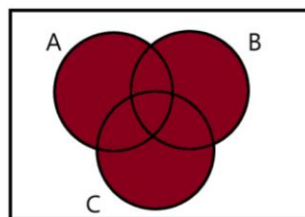
เขียนเป็นแผนภาพได้



3) ถ้าเหตุการณ์ 3 เหตุการณ์ที่มีความสัมพันธ์กันแล้ว

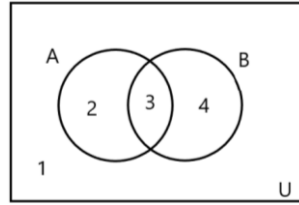
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

เขียนเป็นแผนภาพได้



2. กำหนดให้  $n(U) = 10$   $n(A) = 5$   $n(B) = 7$  และ  $n(A \cap B) = 3$

1) จงเขียนเป็นแผนภาพ



$$2) P(A) = \frac{5}{10}$$

$$3) P(B) = \frac{7}{10}$$

$$4) P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$

$$5) P(A \cup B) = \frac{5}{10} + \frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$$

$$6) P(A \cup B)' = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

$$7) P(A - B) = \frac{2}{10}$$

$$8) P(A) + P(A \cap B) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10}$$

$$9) P(B) + P(A \cap B) = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} = 1$$





### ใบงานที่ 3.3.3

#### เรื่อง โจทย์ปัญหาความน่าจะเป็น

คำชี้แจง : ให้นักเรียนหาคำตอบของแต่ละข้อต่อไปนี้

1. กล่องใบหนึ่งมีลูกแก้วสีขาว 3 ลูก สีชมพู 2 ลูก หยิบลูกแก้วอย่างสุ่มครั้งละ 1 ลูก 2 ครั้ง โดยหยิบลูกแก้วแล้วไม่ใส่คืนกล่อง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วทั้งสองลูกมีสีต่างกัน มีลูกแก้วทั้งหมด 5 ลูก สุ่มหยิบครั้งละ 1 ลูก 2 ครั้งแบบไม่ใส่คืน

วิธีทำ จะได้  $n(S) = \binom{5}{1} \binom{4}{1} = 20$

ต้องการลูกแก้วทั้งสองลูกมีสีต่างกัน

จะได้  $n(E) = n_1n_2 + n_2n_1$

$$= \binom{3}{1} \binom{2}{1} + \binom{2}{1} \binom{3}{1}$$

$$= 6 + 6$$

$$= 12$$

ดังนั้น  $P(E) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

2. ถ้าเขียนพจน์ทุกพจน์ของการกระจาย  $(a+b)^{10}$  เมื่อ  $a, b$  เป็นจำนวนจริงซึ่ง  $a \neq b$  ลงบนลูกปิงปอง ลูกละ 1 พจน์ ใส่ลูกปิงปองทั้งหมดลงในกล่องแล้วหยิบลูกปิงปองออกมา 1 ลูก โดยการสุ่มความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกปิงปองที่มีพจน์ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็น 252 เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ ในการกระจาย  $(a+b)^{10}$  จะมีจำนวนพจน์ทั้งหมด 11 พจน์

จะได้  $n(S) = 11$

และพจน์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็น 252 มีอยู่ 1 พจน์

จะได้  $n(E) = 1$

ดังนั้น  $P(E) = \frac{1}{11}$



3. ความน่าจะเป็นที่แดนสอบผ่านวิชาภาษาไทยและภาษาอังกฤษเป็น  $\frac{2}{3}$  และ  $\frac{4}{9}$  ตามลำดับ

ถ้าความน่าจะเป็นที่แดนจะสอบผ่านทั้งสองวิชาเป็น  $\frac{1}{4}$  แล้วความน่าจะเป็นที่แดนจะสอบไม่ผ่านทั้ง 2 วิชา

เป็นเท่าใด

วิธีทำ ให้ T แทนเหตุการณ์ที่แดนจะสอบผ่านวิชาภาษาไทย

E แทนเหตุการณ์ที่แดนจะสอบผ่านวิชาภาษาอังกฤษ

จาก  $P(T \cup E) = P(T) + P(E) - P(T \cap E)$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{31}{36}$$

ดังนั้น  $P(T \cup E)' = 1 - P(T \cup E)$

$$= 1 - \frac{31}{36}$$

$$= \frac{5}{36}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่แดนจะสอบไม่ผ่านทั้ง 2 วิชาเท่ากับ  $\frac{5}{36}$